COURS ILLUSTRÉ - LYCÉE - 2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES A - SEMESTRE 1

Dérivation et étude des fonctions

La dérivée mesure une variation locale et donne la pente d'une tangente. Son signe décrit ensuite les variations d'une fonction sur un intervalle. En 2 Bac SM A, l'étude des fonctions relie calcul, raisonnement et lecture graphique : on cherche le domaine et les symétries, on étudie les limites et les branches infinies, puis on utilise les dérivées première et seconde pour construire une courbe cohérente. Ce cours de dérivation et étude des fonctions détaille chaque étape avec des exemples résolus, puis propose six exercices corrigés.

Mathématiques 2ème Bac Sciences Mathématiques A BIOF - Programme marocain - Mis à jour le 18/11/2026

Objectifs du chapitre

- Étudier la dérivabilité en un point, à droite et à gauche, et interpréter le résultat
- Dériver une composée, une réciproque, une racine n-ième et une arctangente
- Relier signe de la dérivée, variations, extrema, concavité et signe de la fonction
- Exploiter symétries, périodicité, asymptotes et branches infinies dans une étude complète

Avant de commencer

- Limites, continuité et fonction réciproque
- Dérivées usuelles de 1ère Bac et calcul trigonométrique
- Résolution d'équations et tableaux de signes

1. Nombre dérivé, tangente et approximation affine

Dérivabilité en un point

Une fonction f définie près de a est dérivable en a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite réelle lorsque $h \to 0$. Cette limite est notée $f'(a)$. Si la limite n'existe que pour $h \to 0^+$ (respectivement $h \to 0^-$), on parle de dérivabilité à droite (respectivement à gauche) et l'on note $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$).

$$T_a : \quad y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

L'équation de la tangente utilise la valeur de la fonction et celle de sa dérivée au même point.

Dérivabilité, continuité et demi-tangentes

Une fonction dérivable en a est continue en a. Elle est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche avec $f'_d(a) = f'_g(a)$. Si $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, la courbe présente un point anguleux avec deux demi-tangentes. Si le taux d'accroissement tend vers un infini, la courbe admet une demi-tangente verticale : ce n'est pas une dérivée réelle.

Point anguleux et demi-tangente verticale

La fonction $|x|$ est continue en 0, mais ses taux d'accroissement à gauche et à droite valent -1 et 1 : elle n'est pas dérivable en 0 et sa courbe y forme un point anguleux.

1. Pour $f(x) = \sqrt{x}$, $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}} \to +\infty$ quand $h \to 0^+$: f n'est pas dérivable à droite en 0, et sa courbe admet en O une demi-tangente verticale.

Approcher une racine sans calculatrice

Pour $f(x)=\sqrt{x}$, $f(4)=2$ et $f'(4)=\dfrac{1}{4}$. La tangente a pour équation $y=2+\dfrac{x-4}{4}$.

1. À proximité de 4, $\sqrt{4+h}\approx 2+\dfrac{h}{4}$. Ainsi $\sqrt{4{,}04}\approx 2{,}01$. Il s'agit d'une approximation locale ; l'erreur sera encadrée avec les accroissements finis.

En physique, on note $dy = f'(x)\,dx$: une petite variation dx de la variable produit une variation de la fonction proche de dy. La dérivée s'écrit alors $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$. Dans l'exemple précédent, $dx=0{,}04$ et $dy=\dfrac{1}{4}\times 0{,}04=0{,}01$. Cette écriture différentielle traduit exactement l'approximation affine par la tangente.

2. Les règles de dérivation et leurs conditions

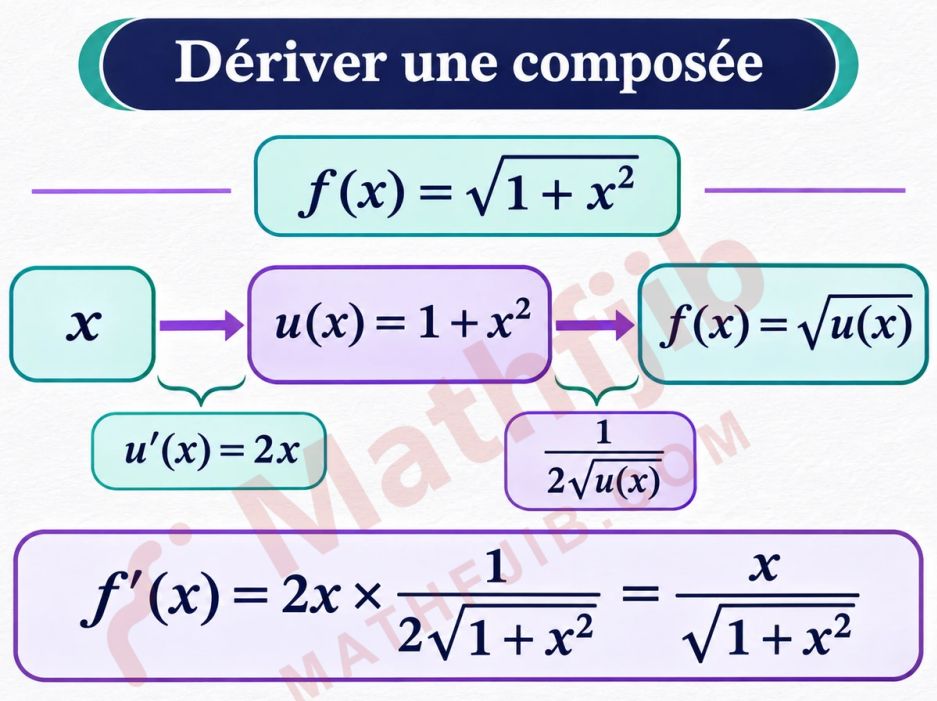
Expression	Dérivée	Condition
$u+v$	$u'+v'$	u et v dérivables
uv	$u'v+uv'$	u et v dérivables
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$v\neq 0$
$g\circ u$	$u'\times(g'\circ u)$	u dérivable en x, g dérivable en $u(x)$
x^r	rx^{r-1}	$x>0$, $r\in\mathbb{Q}$
u^r	$ru'u^{r-1}$	$u>0$, $r\in\mathbb{Q}$
$\sqrt[n]{u}$	$\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$u>0$
$\arctan u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	u dérivable

Reconnaître la fonction extérieure

Pour $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, on pose $u(x)=1+x^2$. Comme $u(x)>0$, la racine est dérivable en $u(x)$ pour tout réel x.

1. La règle de composition donne $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Oublier $u'(x)$ ferait perdre le facteur $2x$.

Mathfjib MATHFJIB.COM



Pour $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, la dérivée intérieure $2x$ multiplie la dérivée de la racine : $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Dériver une puissance rationnelle

Sur $]0,+\infty[$, $f(x)=x\sqrt[3]{x}=x^{\frac{4}{3}}$.

1. Donc $f'(x)=\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. Écrire la fonction comme une puissance rationnelle évite une dérivation de produit.

3. Dériver une fonction réciproque

Dérivée de la réciproque

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I. Si f est dérivable en $a\in I$ avec $f'(a)\neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b=f(a)$ et $(f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$. Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$ pour tout $y\in f(I)$.

L'égalité $f\big(f^{-1}(y)\big)=y$ explique la formule : en dérivant, on obtient $f'\big(f^{-1}(y)\big)\,(f^{-1})'(y)=1$. Le facteur $f'\big(f^{-1}(y)\big)$ doit donc être non nul. Si $f'(a)=0$, la courbe de f^{-1} admet au point d'abscisse $b=f(a)$ une tangente verticale, symétrique de la tangente horizontale de f par rapport à la droite $y=x$.

Une réciproque sans expression explicite

Soit $f(x)=x+\sin x$ sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x)=1+\cos x\geq 0$, et f' ne s'annule qu'en des points isolés : f est continue, strictement croissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Comme $f(0)=0$ et $f'(0)=2$, la réciproque est dérivable en 0 et $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{2}$.
2. En revanche $f(\pi)=\pi$ et $f'(\pi)=0$: f^{-1} n'est pas dérivable en π et sa courbe y admet une tangente verticale.

Racine n-ième et arctangente

Sur $]0,+\infty[$, $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$. Comme $\tan' = 1+\tan^2$, la formule de la réciproque donne $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout réel x.

Attention

Étudier le domaine de $\sqrt[n]{u(x)}$ et celui de sa dérivée sont deux opérations différentes. Aux zéros de u, la formule obtenue pour $u(x)>0$ ne s'applique pas : on étudie directement le taux d'accroissement. Pour $n \geq 3$, le programme se limite au calcul de la dérivée de $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$, sans étude complète de ces fonctions.

4. Passer du signe de la dérivée au tableau de variations

Dérivée et monotonie

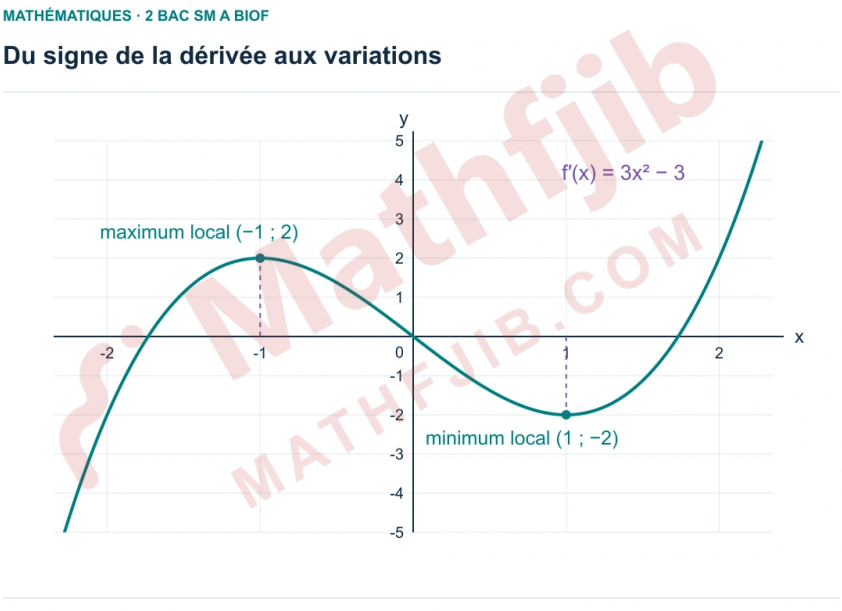
Si f est dérivable sur un intervalle I et si $f' \geq 0$ sur I, alors f est croissante sur I. Si $f' > 0$ sur I, elle est strictement croissante. Des énoncés analogues valent avec $f' \leq 0$ ou $f' < 0$. Une fonction dérivable sur un intervalle est constante si et seulement si sa dérivée y est nulle.

La condition « sur un intervalle » est essentielle. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a une dérivée négative sur son domaine, mais on décrit séparément ses variations sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$: on ne traverse jamais une valeur interdite dans une flèche de variations.

Étudier un polynôme de bout en bout

Soit $f(x) = x^3 - 3x$. Son domaine est $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$.

1. La dérivée est positive avant -1, négative entre -1 et 1, puis positive après 1.
2. Comme $f(-1) = 2$ et $f(1) = -2$, la fonction croît jusqu'à 2, décroît jusqu'à -2, puis croît de nouveau. Ces deux valeurs sont des extrema locaux, pas des extrema globaux sur $\mathbb{R}$.



Pour f(x) = x³ − 3x, la dérivée 3(x − 1)(x + 1) change de signe aux abscisses −1 et 1.

Pour $f(x) = x^3 - 3x$, la dérivée $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ change de signe aux abscisses -1 et 1.

4.1 Points critiques et extrema

La stricte croissance n'impose pas $f' > 0$ en chaque point : $x \mapsto x^3$ est strictement croissante avec une dérivée nulle en 0. Une fonction dérivable sur un intervalle est strictement croissante si sa dérivée y est positive ou nulle et ne s'annule qu'en des points isolés. En un point intérieur où f est dérivable, un extremum local impose $f'(a) = 0$, mais cette condition n'est pas suffisante. Un changement de signe de f', de positif à négatif, donne un maximum local ; le changement inverse donne un minimum local. Sur un segment, on compare aussi les valeurs aux extrémités.

4.2 Lire le signe d'une fonction sur son tableau de variations

Un zéro unique et le signe qui en découle

Soit $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$. On a $g'(x) = 6x(x-1)$: g croît sur $]-\infty, 0]$, décroît sur $[0, 1]$ et croît sur $[1, +\infty[$.

1. Sur $]-\infty, 1]$, le maximum de g vaut $g(0) = -1 < 0$: g y est strictement négative.
2. Sur $[1, +\infty[$, g est continue et strictement croissante de $g(1) = -2$ vers $+\infty$: elle s'annule en un unique réel α, avec $\alpha \in]1, 2[$ puisque $g(2) = 3$. Ainsi $g < 0$ sur $]-\infty, \alpha[$ et $g > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$.

Graphiquement, le signe de $f(x)$ se lit sur la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses : $f(x) > 0$ lorsque le point de la courbe est au-dessus de cet axe. De même, le signe de $f(x) - g(x)$ donne la position relative de deux courbes.

5. Dérivée seconde, concavité et point d'inflexion

Dérivée seconde et concavité

Lorsque f' est dérivable, sa dérivée est notée f''. Si $f'' \geq 0$ sur un intervalle, f y est convexe : sa courbe est au-dessus de ses tangentes. Si $f'' \leq 0$, elle y est concave : sa courbe est au-dessous de ses tangentes.

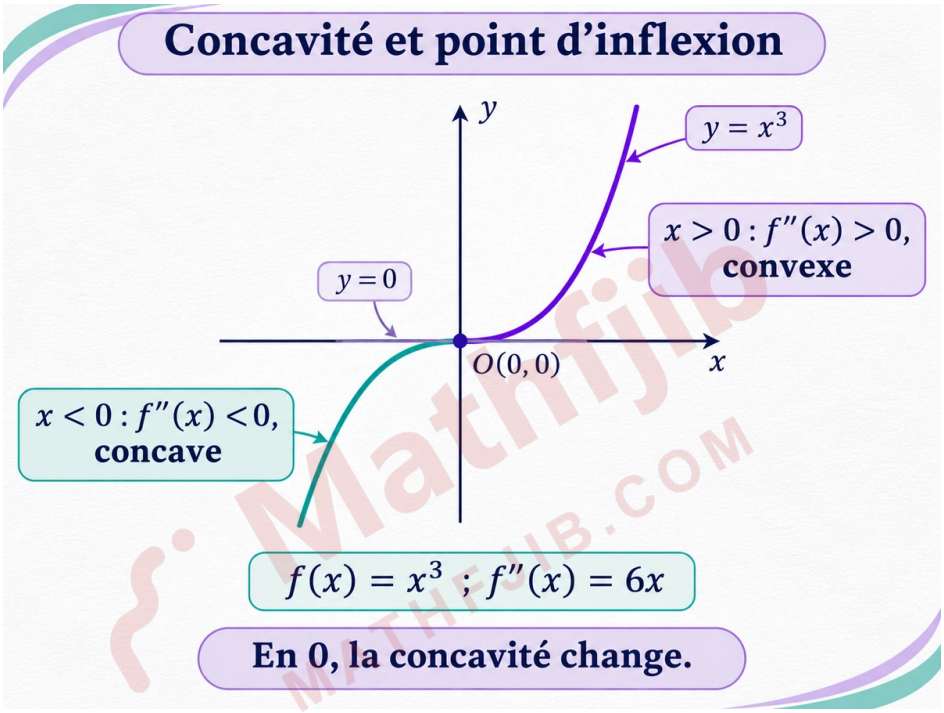
Point d'inflexion

Le point $A\big(a, f(a)\big)$ est un point d'inflexion si la courbe change de concavité en A, c'est-à-dire si f'' s'annule en a en changeant de signe. La courbe traverse alors sa tangente en A.

Un zéro de la dérivée seconde à interpréter

Pour $f(x) = x^3 - 3x$, on a $f''(x) = 6x$. La concavité change en 0 et le point $O(0, 0)$ est un point d'inflexion. La tangente en 0 est $y = -3x$, et $f(x) - (-3x) = x^3$ change de signe.

1. En revanche $x \mapsto x^4$ vérifie $f''(0) = 0$ sans changement de concavité. Une annulation isolée de f'' ne prouve pas une inflexion.



La fonction $f(x) = x^3$ est concave pour $x < 0$ et convexe pour $x > 0$; la dérivée seconde $6x$ change de signe en 0.

6. Éléments de symétrie et périodicité

Axe et centre de symétrie

La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe de f si, pour tout $x \in D_f$, on a $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$. Le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie si, pour tout $x \in D_f$, on a $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Vérifier un centre de symétrie

Pour $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, le domaine est symétrique par rapport à 1.

1. On calcule $f(2 - x) + f(x) = \dfrac{5 - 2x}{1 - x} + \dfrac{2x + 1}{x - 1} = \dfrac{2x - 5 + 2x + 1}{x - 1} = \dfrac{4x - 4}{x - 1} = 4$. Le point $\Omega(1, 2)$ est donc centre de symétrie de la courbe.

Fonction périodique

f est périodique de période $T > 0$ si, pour tout $x \in D_f$, $x + T \in D_f$, $x - T \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$. On étudie alors f sur un intervalle de longueur T, puis on complète la courbe par des translations de vecteur $k T \vec{i}$. Une parité permet de réduire encore l'intervalle d'étude.

Étudier une fonction trigonométrique sur une demi-période

Soit $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$, définie sur $\mathbb{R}$. Elle est 2π-périodique et impaire : on l'étudie sur $[0, \pi]$, puis on complète par symétrie de centre O et par translations.

1. On trouve $f'(x) = \dfrac{\cos x(2 + \cos x) + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} = \dfrac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$. Sur $[0, \pi]$, la dérivée est positive pour $x < \dfrac{2\pi}{3}$ et négative ensuite.

2. La fonction admet donc sur $\mathbb{R}$ le maximum $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, et par imparité le minimum $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. Asymptotes et branches infinies

Limite étudiée	Interprétation
$f(x) \to \pm\infty$ quand $x \to a$	La droite $x = a$ est une asymptote verticale
$f(x) \to b$ quand $x \to \pm\infty$	La droite $y = b$ est une asymptote horizontale
$f(x) - (mx + p) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$	La droite $y = mx + p$ est une asymptote oblique si $m \neq 0$

Si $f(x)$ tend vers un infini et...	Conclusion
$\frac{f(x)}{x} \to 0$	Branche parabolique de direction l'axe des abscisses
$\frac{f(x)}{x} \to \pm\infty$	Branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
$\frac{f(x)}{x} \to m \neq 0$ et $f(x) - mx \to p$ réel	Asymptote oblique d'équation $y = mx + p$
$\frac{f(x)}{x} \to m \neq 0$ et $f(x) - mx \to \pm\infty$	Branche parabolique de direction la droite $y = mx$

On étudie séparément chaque infini, en x tendant vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

Trouver la droite puis la position de la courbe

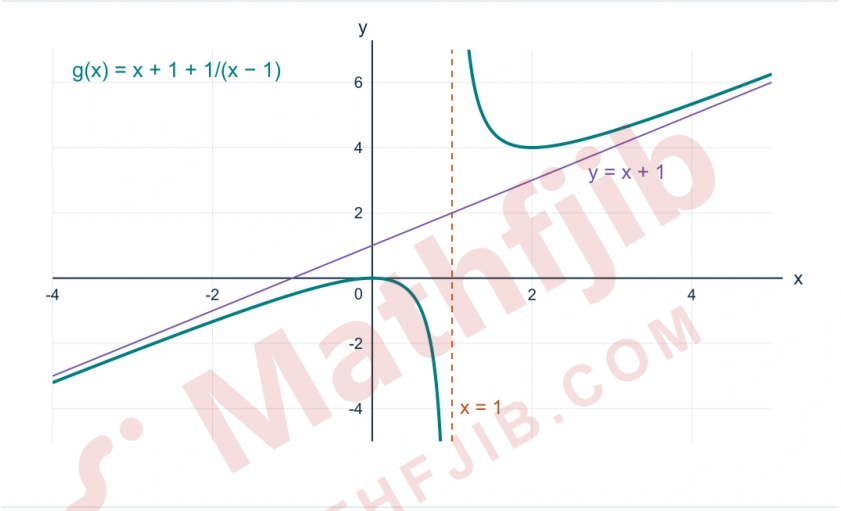
Pour $g(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$, le domaine exclut 1. L'écart $g(x) - (x+1) = \frac{1}{x-1}$ tend vers 0 aux deux infinis.

1. L'asymptote oblique est donc $y = x + 1$. La courbe est au-dessous de cette droite pour $x < 1$ et au-dessus pour $x > 1$. La droite $x = 1$ est aussi une asymptote verticale.

Mathfjib MATHFJIB.COM

MATHÉMATIQUES · 2 BAC SM A BIOF

Asymptotes : observer l'écart avec une droite



Pour g(x) = x + 1 + 1/(x − 1), les asymptotes sont x = 1 et y = x + 1 ; le signe de l'écart donne la position de la courbe.

Pour $g(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$, les asymptotes sont $x = 1$ et $y = x + 1$; le signe de l'écart donne la position de la courbe.

8. Étude complète d'une fonction irrationnelle

La fonction $x \mapsto x - 2\sqrt{x}$

Soit $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ sur $D_f = [0, +\infty[$. En $+\infty$, $f(x) = x\left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right) \to +\infty$; de plus $\dfrac{f(x)}{x} \to 1$ et $f(x) - x = -2\sqrt{x} \to -\infty$: la courbe admet une branche parabolique de direction la droite $y = x$, sans asymptote.

1. En 0 : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}} \to -\infty$ quand $x \to 0^+$. La fonction n'est pas dérivable à droite en 0 et la courbe admet en O une demi-tangente verticale.
2. Pour $x > 0$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$: f décroît sur $[0, 1]$ et croît sur $[1, +\infty[$, avec le minimum $f(1) = -1$. Les zéros sont 0 et 4, car $f(x) = \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 2)$.
3. Enfin $f''(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} > 0$: la courbe est convexe sur $]0, +\infty[$. Toutes ces informations donnent un tracé cohérent.

Méthode : Organiser une étude de fonction en SM A

1. Écrire le domaine, puis chercher parité, périodicité ou centre de symétrie pour réduire l'intervalle d'étude.
2. Calculer les limites aux bornes du domaine et identifier les asymptotes et les branches infinies.
3. Étudier la dérivabilité aux points délicats, calculer la dérivée, la factoriser et justifier chaque signe.
4. Construire le tableau avec les limites, les valeurs aux points critiques et les coupures du domaine.
5. Ajouter tangentes, concavité, intersections avec les axes et position par rapport aux asymptotes, puis tracer une courbe compatible avec tous ces résultats.

9. Résoudre une équation irrationnelle

Méthode : Élever au carré sans ajouter de solutions

1. Écrire les conditions d'existence des racines.
2. Pour $\sqrt{A} = B$, ajouter la condition $B \geq 0$: sous cette condition, $\sqrt{A} = B \iff A = B^2$.
3. Résoudre l'équation obtenue, puis ne garder que les solutions qui vérifient toutes les conditions.

Une solution parasite éliminée

Résolvons $\sqrt{x+5} = x - 1$. Il faut $x \geq -5$ et $x - 1 \geq 0$, soit $x \geq 1$.

1. Sous ces conditions, l'équation équivaut à $x + 5 = (x-1)^2$, c'est-à-dire $x^2 - 3x - 4 = 0$, dont les racines sont 4 et -1.
2. Seul 4 vérifie $x \geq 1$: l'ensemble des solutions est $\{4\}$, et l'on contrôle $\sqrt{9} = 3 = 4 - 1$. La valeur -1 est une solution parasite créée par l'élévation au carré.

10. Des dérivées aux primitives

Primitive sur un intervalle

Une primitive de f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$. Si F est une primitive, les autres sont les fonctions $F + C$, avec C réel. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives, et, pour $x_0 \in I$ et y_0 réel, une seule primitive vérifie $F(x_0) = y_0$.

Chaque formule de dérivation se lit à l'envers : $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ a pour primitive $\sqrt{u}$, $u'u^r$ a pour primitive $\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$ si $r \neq -1$, et $\dfrac{u'}{1+u^2}$ a pour primitive $\arctan u$. Par exemple, une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$, et la primitive qui s'annule en 0 est $x \mapsto \sqrt{x^2+1} - 1$. Le calcul intégral du second semestre approfondit ces techniques.

Remarque

Une dérivée nulle sur un domaine formé de deux intervalles ne donne pas une fonction constante : elle est constante sur chacun des intervalles, avec deux constantes éventuellement différentes.

Je retiens

- La tangente en a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$; une demi-tangente verticale correspond à un taux d'accroissement infini.
- La dérivabilité implique la continuité ; la réciproque est fausse.
- Si $f'(a) \neq 0$, alors $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.
- Le signe de la dérivée décrit les variations sur chaque intervalle du domaine ; le tableau de variations donne le signe de la fonction.
- Un point d'inflexion correspond à un changement de concavité, donc à un changement de signe de la dérivée seconde.
- $\Omega(a,b)$ est centre de symétrie si $f(2a-x)+f(x) = 2b$; la droite $x = a$ est axe de symétrie si $f(2a-x) = f(x)$.
- Une branche infinie se classe avec $\dfrac{f(x)}{x}$ puis $f(x) - mx$.

Exercices - À chercher avant la correction

Cherchez chaque exercice sur votre cahier avant de lire sa correction. Justifiez chaque étape et citez le théorème utilisé, avec ses hypothèses.

Exercice 1. Dérivabilité aux bornes et tangente

Facile

Soit $f(x) = x\sqrt{x+1}$, définie sur $[-1, +\infty[$.

1. Étudier la dérivabilité de f à droite en -1 et interpréter graphiquement.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x > -1$ et dresser le tableau de variations de f.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Exercice 2. Dériver racines, puissances et arctangentes

Facile

Calculer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \arctan\sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$.
3. $h(x) = \arctan x + \arctan\dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3. Dérivée d'une fonction réciproque

Intermédiaire

Soit $f(x) = x^3 + x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'(2)$ et $(f^{-1})'(10)$.
3. Exprimer $(f^{-1})'(x)$ en fonction de $f^{-1}(x)$, puis écrire la tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 2.

Exercice 4. Centre de symétrie, asymptotes et variations

Intermédiaire

Soit $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, et C sa courbe.

1. Montrer que le point $\Omega(-1,-1)$ est centre de symétrie de C.
2. Déterminer les asymptotes de C et la position de C par rapport à son asymptote oblique.
3. Étudier les variations de f et vérifier la cohérence avec la question 1.

Exercice 5. Étude d'une fonction irrationnelle

Approfondissement

Soit $f(x) = x + \sqrt{x^2+2x}$ et C sa courbe.

1. Déterminer le domaine D_f de f.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et que la droite $y = 2x+1$ est asymptote à C en $+\infty$.

3. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en -2 ; interpréter.
4. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

Exercice 6. Prouver une inégalité avec la dérivée seconde

Approfondissement

Pour $x \geq 0$, on pose $g(x) = x - \sin x$ et $h(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$.

1. Montrer que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.
2. Calculer h' et h'', puis montrer que $h(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.
3. En déduire un encadrement de $\sin x$ pour $x \geq 0$, puis $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \sin x}{x^2}$.

Mathfjib MATHFJIB.COM
Mathfjib MATHFJIB.COM

Corrections expliquées des exercices

Exercice 1. Dérivabilité aux bornes et tangente

1. Pour $x > -1$, $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \dfrac{x\sqrt{x+1}}{x+1} = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$. Quand $x \to -1^+$, le numérateur tend vers -1 et le dénominateur vers 0^+ : la limite vaut $-\infty$. f n'est pas dérivable à droite en -1 ; la courbe admet au point $A(-1,0)$ une demi-tangente verticale.

2. $f'(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{x}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{2(x+1)+x}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$. La dérivée est négative sur $\left]-1, -\dfrac{2}{3}\right[$ et positive sur $\left]-\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$: f décroît puis croît, avec le minimum $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$: la tangente a pour équation $y = x$.

Exercice 2. Dériver racines, puissances et arctangentes

1. Avec $u(x) = x^2+1 > 0$: $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{3\sqrt[3]{u(x)^2}} = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$.

2. Avec $u(x) = \sqrt{x}$, $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$: $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$.

3. $h'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0$. La dérivée est nulle sur l'intervalle $]0,+\infty[$: h y est constante, égale à $h(1) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$. On retrouve l'identité $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ pour $x > 0$.

Exercice 3. Dérivée d'une fonction réciproque

1. f est continue et $f'(x) = 3x^2+1 > 0$: elle est strictement croissante. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2. f' ne s'annule jamais, donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $f(1) = 2$, $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{4}$. Comme $f(2) = 10$, $(f^{-1})'(10) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{13}$.

3. $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{3\left(f^{-1}(x)\right)^2+1}$. Au point d'abscisse 2, $f^{-1}(2) = 1$ et la pente vaut $\dfrac{1}{4}$: la tangente a pour équation $y = \dfrac{1}{4}(x-2)+1$, soit $y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4. Centre de symétrie, asymptotes et variations

1. Le domaine est symétrique par rapport à -1, car $x \neq -1 \iff -2-x \neq -1$. Puis $f(-2-x) + f(x) = -2 - x - \dfrac{1}{x+1} + x + \dfrac{1}{x+1} = -2 = 2\times(-1)$: $\Omega(-1,-1)$ est centre de symétrie.

2. Quand $x \to -1^+$, $\dfrac{1}{x+1} \to +\infty$ et $f(x) \to +\infty$; quand $x \to -1^-$, $f(x) \to -\infty$: la droite $x = -1$ est asymptote verticale. De plus $f(x) - x = \dfrac{1}{x+1} \to 0$ en $\pm\infty$: la droite $y = x$ est asymptote oblique. C est au-dessus de cette droite pour $x > -1$ et au-dessous pour $x < -1$.

3. $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$. f croît sur $]-\infty,-2]$, décroît sur $[-2,-1[$ et sur $]-1,0]$, puis croît sur $[0,+\infty[$. Le maximum local $f(-2) = -3$ et le minimum local $f(0) = 1$ correspondent aux points $(-2,-3)$ et $(0,1)$, dont le milieu est bien $\Omega(-1,-1)$.

Exercice 5. Étude d'une fonction irrationnelle

1. Il faut $x^2+2x=x(x+2)\geq 0$, soit $D_f=]-\infty,-2]\cup[0,+\infty[$.

2. En $-\infty$, on multiplie par la quantité conjuguée : $f(x)=\dfrac{-2x}{x-\sqrt{x^2+2x}}$. Pour $x<0$, $\sqrt{x^2+2x}=-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}$, d'où $f(x)=\dfrac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}\to -1$. En $+\infty$, $f(x)-(2x+1)=\sqrt{x^2+2x}-(x+1)=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}\to 0$: la droite $y=2x+1$ est asymptote oblique.

3. En 0 : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1+\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\to+\infty$ quand $x\to 0^+$. En -2, avec $f(-2)=-2$ et $x<-2$: $\dfrac{f(x)+2}{x+2}=1-\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}\to-\infty$. f n'est dérivable ni à droite en 0 ni à gauche en -2 ; la courbe admet en ces deux points des demi-tangentes verticales.

4. Sur $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$, $f'(x)=1+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$. Pour $x>0$, $f'(x)>0$. Pour $x<-2$, $(x+1)^2=x^2+2x+1>x^2+2x$ donne $|x+1|>\sqrt{x^2+2x}$, et $x+1<0$, donc $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}<-1$ et $f'(x)<0$. Ainsi f décroît de -1 à -2 sur $]-\infty,-2]$ et croît de 0 à $+\infty$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 6. Prouver une inégalité avec la dérivée seconde

1. $g'(x)=1-\cos x\geq 0$: g est croissante sur $[0,+\infty[$ et $g(0)=0$, donc $g(x)\geq 0$.

2. $h'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$ et $h''(x)=-\sin x+x=g(x)\geq 0$. Donc h' est croissante sur $[0,+\infty[$; comme $h'(0)=0$, on a $h'\geq 0$. Ainsi h est croissante et $h(0)=0$, d'où $h(x)\geq 0$.

3. Pour $x\geq 0$: $x-\dfrac{x^3}{6}\leq\sin x\leq x$. Pour $x>0$, on en tire $0\leq\dfrac{x-\sin x}{x^2}\leq\dfrac{x}{6}$, et le théorème des gendarmes donne une limite nulle.

Questions fréquentes

Comment étudier la dérivabilité d'une fonction en un point ?

Calculer la limite du taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ quand $x\to a$, en séparant la droite et la gauche si l'expression change en a. Une limite réelle commune donne $f'(a)$; une limite infinie donne une demi-tangente verticale.

Comment calculer la dérivée d'une fonction réciproque ?

Vérifier que f est continue, strictement monotone et dérivable avec $f'(a)\neq 0$, puis appliquer $(f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$ avec $b=f(a)$. Il suffit de connaître un antécédent, pas l'expression de la réciproque.

Comment montrer qu'un point est centre de symétrie d'une courbe ?

Vérifier que le domaine est symétrique par rapport à a, puis que $f(2a-x)+f(x)=2b$ pour tout x du domaine. Le point $\Omega(a,b)$ est alors centre de symétrie.

Comment déterminer la nature d'une branche infinie ?

Quand $f(x)$ tend vers un infini, calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$, puis, si elle vaut un réel m non nul, celle de $f(x)-mx$. Une limite réelle p donne l'asymptote $y=mx+p$; sinon, on obtient une branche parabolique.

Une dérivée nulle signifie-t-elle un extremum ?

Non. Il faut étudier le comportement de la fonction autour du point, par exemple le changement de signe de sa dérivée. La fonction cube donne un contre-exemple immédiat.

MATHFJIB - Mathématiques 2 Bac SM A
Suivez les consignes et la progression de votre professeur.
Retrouver le cours, ses illustrations et les exercices corrigés en ligne.

Mathfjib
MATHFJIB.COM
Mathfjib
MATHFJIB.COM