COURS ILLUSTRÉ - LYCÉE - 2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES A - SEMESTRE 1

Équations différentielles

Dans une équation différentielle, l'inconnue est une fonction et l'équation relie cette fonction à ses dérivées. En 2 Bac SM A, deux familles sont au programme : $y' = ay + b$ et $y'' + ay' + by = 0$, où a et b sont des réels constants. Une solution générale contient des constantes ; les conditions initiales permettent de choisir la solution qui correspond à la situation étudiée. Ce cours d'équations différentielles traite aussi les équations qui se ramènent à ces deux formes et leurs applications en physique, avec des exemples résolus et six exercices corrigés.

Mathématiques 2ème Bac Sciences Mathématiques A BIOF - Programme marocain - Mis à jour le 18/11/2026

Objectifs du chapitre

- Identifier l'ordre d'une équation différentielle et vérifier une solution
- Résoudre $y' = ay$ et $y' = ay + b$, y compris le cas $a = 0$
- Résoudre $y'' + ay' + by = 0$ selon le signe du discriminant caractéristique
- Ramener une équation à une forme connue et l'appliquer à une situation de physique

Avant de commencer

- Exponentielle, logarithme et dérivées usuelles
- Équations du second degré, discriminant et racines complexes
- Dérivation des produits et des fonctions trigonométriques

1. Qu'est-ce qu'une solution d'équation différentielle ?

Équation et ordre

Une équation différentielle est une égalité comportant une fonction inconnue et certaines de ses dérivées. Son ordre est celui de la dérivée la plus élevée. Une solution sur un intervalle I est une fonction suffisamment dérivable qui vérifie l'égalité pour tout $x \in I$.

Dans l'écriture $y' = 2y$, la lettre y représente une fonction de x. Dire que $y(x) = Ce^{2x}$ est une solution signifie que sa dérivée vaut $2Ce^{2x}$ en chaque point. La constante C ne dépend pas de x. Une égalité vérifiée seulement en un point ne suffit pas à résoudre une équation différentielle.

Vérifier avant de généraliser

La fonction $f(x) = 3e^{-2x}$ satisfait $f'(x) = -6e^{-2x} = -2f(x)$. Elle est donc solution de $y' = -2y$ sur $\mathbb{R}$.

1. En revanche $f(x) = 3e^{-2x} + 1$ n'est pas solution de cette équation, puisque $f' + 2f = 2$.

2. Premier ordre homogène : $y' = ay$

Toutes les solutions de $y' = ay$

Pour $a \in \mathbb{R}$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay$ sont exactement les fonctions $y(x) = Ce^{ax}$, où $C \in \mathbb{R}$. La solution nulle correspond à $C = 0$.

Pour comprendre pourquoi il n'y en a pas d'autres, on considère $g(x) = y(x)e^{-ax}$. Si $y' = ay$, alors $g'(x) = \big(y'(x) - ay(x)\big)e^{-ax} = 0$: g est constante, et l'on retrouve $y = Ce^{ax}$. Cette preuve évite de diviser par y, ce qui ferait perdre la solution nulle.

Condition initiale au premier ordre

Pour tous réels x_0 et y_0, il existe une unique solution de $y' = ay$ vérifiant $y(x_0) = y_0$: c'est $y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$.

Une condition donnée en un point non nul

Pour $y' = 3y$ et $y(2) = 5$, on écrit $y(x) = Ce^{3x}$ puis $Ce^6 = 5$.

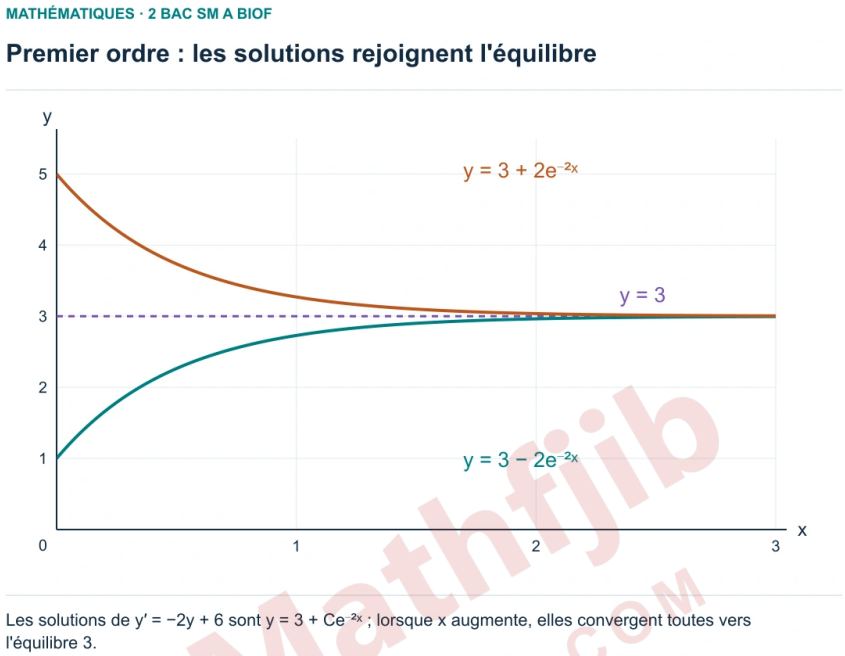
1. Ainsi $y(x) = 5e^{3(x-2)}$. La vérification en $x = 2$ redonne bien 5.

3. Premier ordre affine : $y' = ay + b$

Solution générale si $a \neq 0$

Pour $a \neq 0$, les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions $y(x) = -\dfrac{b}{a} + Ce^{ax}$, avec C réel. La constante $L = -\dfrac{b}{a}$ est la solution d'équilibre, car $aL + b = 0$. Avec $y(x_0) = y_0$, on obtient $y(x) = L + (y_0 - L)e^{a(x-x_0)}$.

Le changement de fonction $z = y - L$ donne $z' = az$: il suffit d'écarter la valeur d'équilibre pour retrouver le premier ordre homogène. Si $a < 0$, le terme exponentiel tend vers 0 en $+\infty$ et toutes les solutions tendent vers L. Si $a > 0$, les solutions différentes de l'équilibre s'en éloignent lorsque x augmente.



Les solutions de y' = −2y + 6 sont y = 3 + Ce⁻²ˣ ; lorsque x augmente, elles convergent toutes vers l'équilibre 3.

Les solutions de $y' = -2y + 6$ sont les fonctions $y = 3 + Ce^{-2x}$; lorsque x augmente, elles convergent toutes vers l'équilibre 3.

Revenir vers un équilibre

Pour $y' = -2y + 6$ et $y(0) = 1$, l'équilibre vaut $L = 3$, et la solution est $y(x) = 3 - 2e^{-2x}$.

1. Sa dérivée est $4e^{-2x}$ et $-2y + 6 = 4e^{-2x}$: l'équation est vérifiée. La fonction est croissante et tend vers 3 en $+\infty$.

Attention

La formule contenant $-\dfrac{b}{a}$ ne s'utilise pas pour $a = 0$. L'équation devient alors $y' = b$, dont les solutions sont $y(x) = bx + C$. Si $a = b = 0$, les solutions sont les fonctions constantes.

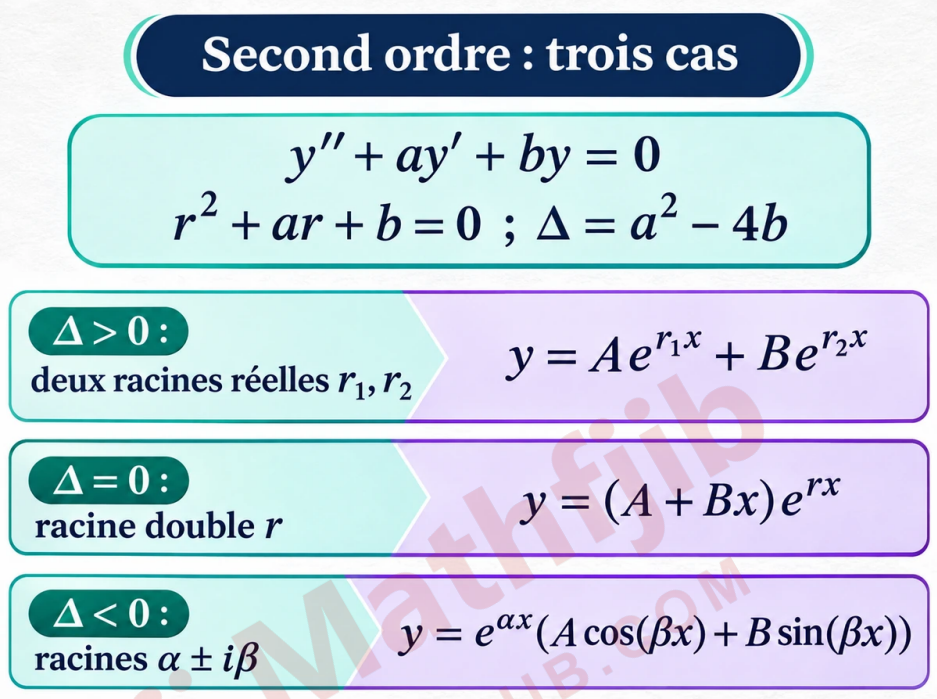
4. Second ordre homogène et équation caractéristique

Équation caractéristique

À l'équation $y'' + ay' + by = 0$, on associe $r^2 + ar + b = 0$. En cherchant une solution de la forme $y = e^{rx}$, on obtient $y'' + ay' + by = (r^2 + ar + b)\,e^{rx}$: la fonction e^{rx} est solution si et seulement si r est racine de l'équation caractéristique. Le discriminant $\Delta = a^2 - 4b$ détermine la forme de toutes les solutions réelles.

Discriminant	Racines caractéristiques	Solution générale réelle
$\Delta > 0$	$r_1 \neq r_2$ réelles	$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	$r = -\dfrac{a}{2}$ double	$y = (A + Bx)e^{rx}$
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta$, avec $\alpha = -\dfrac{a}{2}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} > 0$	$y = e^{\alpha x}\big(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\big)$

A et B sont des constantes réelles.



Pour $y'' + ay' + by = 0$, le signe du discriminant de $r^2 + ar + b = 0$ détermine les trois formes de solutions réelles.

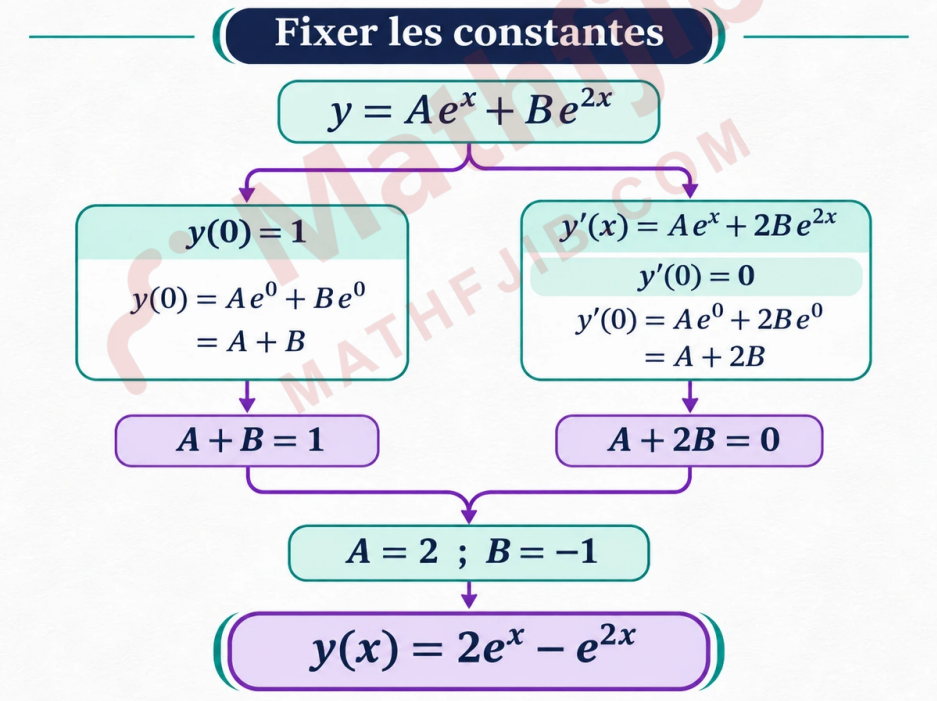
Les formes du tableau donnent l'ensemble des solutions ; ce résultat est admis en 2 Bac SM. On peut en revanche vérifier chaque forme par dérivation et substitution. Dans le cas d'une racine double, le facteur x est indispensable pour disposer de deux constantes indépendantes. Pour des conditions $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ données, il existe une unique solution.

4.1 Deux racines réelles distinctes

Déterminer A et B

L'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$ a pour équation caractéristique $(r-1)(r-2) = 0$. Donc $y = Ae^x + Be^{2x}$.

1. Les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ donnent $A + B = 1$ et $A + 2B = 0$. Ainsi $A = 2$, $B = -1$ et $y = 2e^x - e^{2x}$.



Pour $y = Ae^x + Be^{2x}$, les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ donnent $A + B = 1$ et $A + 2B = 0$, donc $A = 2$ et $B = -1$.

4.2 Une racine réelle double

Le facteur x change la famille de solutions

Pour $y'' + 2y' + y = 0$, la racine caractéristique est $r = -1$, double. On écrit $y = (A + Bx)e^{-x}$.

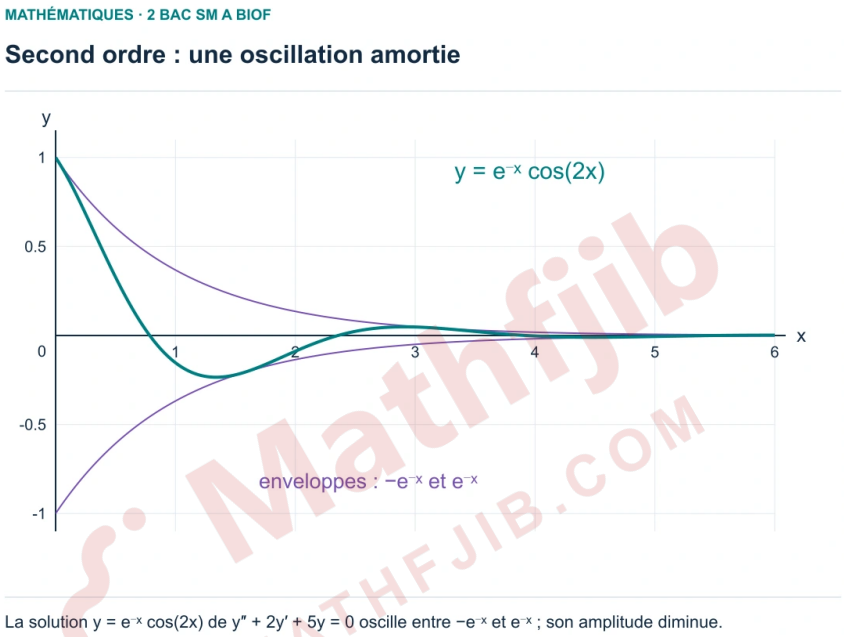
1. Si $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$, alors $A = 2$ et $B - A = 1$, d'où $B = 3$. La solution est $(2 + 3x)e^{-x}$. Écrire seulement Ce^{-x} ne permettrait pas de satisfaire ces deux conditions.

4.3 Racines complexes et solutions oscillantes

Une oscillation amortie

L'équation $y'' + 2y' + 5y = 0$ a pour racines caractéristiques $-1 \pm 2i$. Ses solutions réelles sont $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$.

1. Avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$, on trouve $A = 1$ puis $-A + 2B = -1$, donc $B = 0$. La solution est $e^{-x}\cos 2x$, comprise entre $-e^{-x}$ et e^{-x}.



La solution $y = e^{-x}\cos(2x)$ de $y'' + 2y' + 5y = 0$ oscille entre $-e^{-x}$ et e^{-x} ; son amplitude diminue.

Remarque

Pour $y'' + \omega^2 y = 0$, avec $\omega > 0$, les solutions sont $A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$. Si $(A, B) \neq (0, 0)$, on peut les écrire $R\cos(\omega x - \varphi)$ avec $R = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{A}{R}$ et $\sin\varphi = \dfrac{B}{R}$: ce sont des oscillations de période $\dfrac{2\pi}{\omega}$ et d'amplitude R.

5. Équations qui se ramènent aux formes étudiées

Méthode : Utiliser une solution particulière

1. Chercher une solution particulière p de l'équation complète, souvent de la même forme que le second membre : une constante, une fonction affine, un polynôme.
2. Poser $z = y - p$: y est solution de l'équation complète si et seulement si z est solution de l'équation homogène associée.
3. Résoudre l'équation homogène, écrire $y = p + z$, puis utiliser les conditions initiales sur y et non sur z.

Un second membre affine au premier ordre

Soit $(E) : y' = 2y - 4x + 2$. Cherchons une solution affine $p(x) = \alpha x + \beta$: $\alpha = 2\alpha x + 2\beta - 4x + 2$ pour tout x impose $2\alpha - 4 = 0$ et $\alpha = 2\beta + 2$, soit $\alpha = 2$ et $\beta = 0$.

1. Donc $p(x) = 2x$. Alors $z = y - 2x$ vérifie $z' = y' - 2 = 2y - 4x = 2z$, d'où $z = Ce^{2x}$. Les solutions de (E) sont $y(x) = 2x + Ce^{2x}$.

Un second membre constant au second ordre

Soit $y'' + 4y = 8$. La fonction constante $p = 2$ est solution, car $4 \times 2 = 8$.

1. Avec $z = y - 2$, on obtient $z'' + 4z = 0$, donc $z = A\cos 2x + B\sin 2x$ et $y = 2 + A\cos 2x + B\sin 2x$.

D'autres changements d'inconnue ramènent aussi aux formes du programme. Si une équation du second ordre ne contient pas y, comme $y'' + 2y' = 0$, la fonction $z = y'$ vérifie $z' = -2z$: on trouve $y' = Ce^{-2x}$, puis $y = -\dfrac{C}{2}e^{-2x} + D$. L'énoncé indique en général le changement de fonction à utiliser.

6. Modéliser des situations de physique

Décroissance radioactive

Le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs vérifie $N'(t) = -\lambda N(t)$, avec $\lambda > 0$. Donc $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, où $N_0 = N(0)$.

1. La demi-vie $t_{\frac{1}{2}}$ vérifie $N\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{N_0}{2}$, soit $e^{-\lambda t_{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2}$ et $t_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$. Elle ne dépend pas de N_0.

Charge d'un condensateur

Dans un circuit RC soumis à une tension constante E, la tension u aux bornes du condensateur vérifie $RC\,u' + u = E$, soit $u' = -\dfrac{1}{\tau}u + \dfrac{E}{\tau}$ avec $\tau = RC$.

1. L'équilibre vaut E ; avec $u(0) = 0$, on obtient $u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. À $t = \tau$, la charge atteint environ 63% de sa valeur finale, car $1 - e^{-1} \approx 0{,}63$.

Oscillateur mécanique

Pour un solide de masse m accroché à un ressort de raideur k, sans frottement, l'abscisse vérifie $mx'' + kx = 0$, soit $x'' + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

1. Les solutions sont $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$: le mouvement est périodique de période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Un frottement fluide ajoute un terme en x' et produit des oscillations amorties.

7. Vérifier la solution et organiser la rédaction

Méthode : Résoudre et vérifier sans perdre de cas

1. Identifier l'ordre, les coefficients et la présence éventuelle d'un second membre.
2. Au premier ordre, séparer le cas $a = 0$; au second, calculer le discriminant de l'équation caractéristique.
3. Écrire la solution générale avec toutes les constantes nécessaires, en ajoutant une solution particulière si l'équation n'est pas homogène.
4. Dériver l'expression avant d'appliquer les conditions portant sur la dérivée.
5. Résoudre le système obtenu, puis vérifier l'équation et chaque condition initiale.

Je retiens

- $y' = ay$ a pour solutions $y = Ce^{ax}$; la condition $y(x_0) = y_0$ fixe C.
- Pour $a \neq 0$, $y' = ay + b$ a pour solutions $y = -\dfrac{b}{a} + Ce^{ax}$; si $a = 0$, $y = bx + C$.
- Pour $y'' + ay' + by = 0$, on résout $r^2 + ar + b = 0$: deux racines réelles, une racine double ou deux racines complexes $\alpha \pm i\beta$.
- Si $\Delta < 0$, les solutions sont $e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$.

- Avec une solution particulière p, y est solution de l'équation complète si et seulement si $y - p$ est solution de l'équation homogène.
- Les conditions initiales fixent les constantes ; la substitution vérifie la solution.

Mathfjib MATHFJIB.COM
Mathfjib MATHFJIB.COM

Exercices - À chercher avant la correction

Cherchez chaque exercice sur votre cahier avant de lire sa correction. Justifiez chaque étape et citez le théorème utilisé, avec ses hypothèses.

Exercice 1. Premier ordre avec condition initiale

Facile

1. Résoudre $2y' + y = 0$ avec $y(0) = 4$.
2. Résoudre $y' = 3y - 6$ avec $y(0) = 1$.
3. Résoudre $y' = 5$ avec $y(1) = 0$.

Exercice 2. Second ordre : les trois cas

Facile

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - y' - 2y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + 9y = 0$, avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$

Exercice 3. Une équation affine avec second membre

Intermédiaire

On considère $(E) : y' = -2y + 4x$.

1. Déterminer une solution affine p de (E).
2. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $y - p$ est solution de $y' = -2y$.
3. Résoudre (E), puis déterminer la solution vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 4. Datation au carbone 14

Intermédiaire

Le nombre de noyaux de carbone 14 d'un échantillon vérifie $N' = -\lambda N$ avec $\lambda > 0$, et la demi-vie du carbone 14 vaut environ 5730 ans.

1. Exprimer $N(t)$ en fonction de $N_0 = N(0)$, puis λ en fonction de la demi-vie T.
2. Quelle fraction des noyaux reste-t-il au bout de 11460 ans ?
3. Au bout de combien d'années reste-t-il 10% des noyaux initiaux ?

Exercice 5. Second ordre avec second membre affine

Approfondissement

On considère $(E) : y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$.

1. Montrer que $p(x) = x$ est solution de (E).
2. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z = y - p$ est solution de $(H) : z'' - 3z' + 2z = 0$.

3. Résoudre (H) puis (E).
4. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 6. Une équation fonctionnelle

Approfondissement

On cherche les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, $f'(x) = f(-x)$.

1. Montrer qu'une telle fonction est deux fois dérivable et vérifie $f'' + f = 0$.
2. En déduire la forme de f, puis déterminer toutes les solutions du problème.

Mathfjib MATHFJIB.COM
Mathfjib MATHFJIB.COM

Corrections expliquées des exercices

Exercice 1. Premier ordre avec condition initiale

1. L'équation s'écrit $y' = -\frac{1}{2}y$, donc $y = Ce^{-\frac{x}{2}}$. La condition $y(0) = 4$ donne $C = 4$: $y(x) = 4e^{-\frac{x}{2}}$.

2. Ici $a = 3$ et $b = -6$: l'équilibre vaut $-\frac{b}{a} = 2$ et $y = 2 + Ce^{3x}$. Avec $y(0) = 1$, $C = -1$: $y(x) = 2 - e^{3x}$.

3. Comme $a = 0$, $y = 5x + C$, et $y(1) = 0$ donne $C = -5$: $y(x) = 5x - 5$.

Exercice 2. Second ordre : les trois cas

1. $r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0$: $r_1 = 2$ et $r_2 = -1$, donc $y = Ae^{2x} + Be^{-x}$.

2. $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$: racine double 2, donc $y = (A + Bx)e^{2x}$.

3. $r^2 + 9 = 0$: $r = \pm 3i$, donc $y = A\cos 3x + B\sin 3x$. Alors $y(0) = A = 1$ et $y'(0) = 3B = 3$, d'où $B = 1$: $y(x) = \cos 3x + \sin 3x$, qui s'écrit aussi $\sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 3. Une équation affine avec second membre

1. Avec $p(x) = \alpha x + \beta$: $\alpha = -2\alpha x - 2\beta + 4x$ pour tout x, donc $-2\alpha + 4 = 0$ et $\alpha = -2\beta$: $\alpha = 2$ et $\beta = -1$. Ainsi $p(x) = 2x - 1$.

2. Comme $p' = -2p + 4x$, on a $(y-p)' = y' - p' = y' + 2p - 4x$. Donc $(y-p)' = -2(y-p)$ équivaut à $y' + 2p - 4x = -2y + 2p$, c'est-à-dire à $y' = -2y + 4x$.

3. Les solutions de $y' = -2y$ sont Ce^{-2x}, donc celles de (E) sont $y(x) = 2x - 1 + Ce^{-2x}$. La condition $y(0) = 0$ donne $-1 + C = 0$, soit $y(x) = 2x - 1 + e^{-2x}$.

Exercice 4. Datation au carbone 14

1. $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. La condition $N(T) = \frac{N_0}{2}$ donne $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$.

2. $11460 = 2T$, donc $N(2T) = N_0 e^{-2\ln 2} = \frac{N_0}{4}$: il reste le quart des noyaux.

3. $e^{-\lambda t} = \frac{1}{10} \iff t = \frac{\ln 10}{\lambda} = T \times \frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 5730 \times 3{,}32$, soit environ 19000 ans.

Exercice 5. Second ordre avec second membre affine

1. $p'' = 0$ et $p' = 1$, donc $p'' - 3p' + 2p = -3 + 2x$: p est solution.

2. Par linéarité, $z'' - 3z' + 2z = (y'' - 3y' + 2y) - (p'' - 3p' + 2p) = (y'' - 3y' + 2y) - (2x - 3)$. Cette quantité est nulle si et seulement si y est solution de (E).

3. L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ a pour racines 1 et 2 : $z = Ae^x + Be^{2x}$. Les solutions de (E) sont $y = x + Ae^x + Be^{2x}$.

4. $y(0) = A + B = 0$ et $y'(0) = 1 + A + 2B = 0$. On obtient $B = -1$ et $A = 1$: $y(x) = x + e^x - e^{2x}$.

Exercice 6. Une équation fonctionnelle

1. La fonction $x \mapsto f(-x)$ est dérivable, donc f' l'est aussi et $f''(x) = -f'(-x) = -f\big(-(-x)\big) = -f(x)$. Ainsi $f'' + f = 0$.

2. L'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ a pour racines $\pm i$, donc $f(x) = A\cos x + B\sin x$. Réciproquement, il faut vérifier la condition de départ : $f'(x) = -A\sin x + B\cos x$ et $f(-x) = A\cos x - B\sin x$. L'égalité pour tout x impose $B = A$. Les solutions sont les fonctions $f(x) = A(\cos x + \sin x)$, avec A réel.

Questions fréquentes

Comment résoudre l'équation différentielle $y' = ay + b$?

Si $a \neq 0$, écrire $y = -\dfrac{b}{a} + Ce^{ax}$, puis déterminer C avec la condition initiale. Si $a = 0$, l'équation devient $y' = b$ et ses solutions sont $y = bx + C$.

Comment résoudre $y'' + ay' + by = 0$?

Former l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ et calculer son discriminant. Selon son signe, la solution est $Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$, $(A + Bx)e^{rx}$ ou $e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$.

Comment savoir combien de constantes écrire ?

Pour les équations linéaires étudiées ici, la solution générale comporte une constante au premier ordre et deux au second ordre. Les conditions initiales permettent ensuite de les déterminer.

Que faire si l'équation contient un second membre en x ?

Chercher une solution particulière de la même forme que le second membre, par exemple affine, puis ajouter la solution générale de l'équation homogène. Les conditions initiales s'appliquent à la somme obtenue.

Pourquoi ne faut-il pas diviser directement par y ?

Une division par la fonction inconnue suppose qu'elle ne s'annule pas et peut faire disparaître la solution nulle. La méthode du produit par une exponentielle conserve toutes les solutions.

MATHFJIB - Mathématiques 2 Bac SM A
Suivez les consignes et la progression de votre professeur.
Retrouver le cours, ses illustrations et les exercices corrigés en ligne.