COURS ILLUSTRÉ - LYCÉE - 2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES A - SEMESTRE 1

Limites et continuité

Une limite décrit le comportement de $f(x)$ quand x se rapproche d'un réel a ou part vers l'infini. La continuité ajoute une exigence précise : en a, la limite doit exister et être égale à $f(a)$. Ce cours de limites et continuité de 2 Bac SM A reprend le calcul des limites, puis développe la continuité, le théorème des valeurs intermédiaires (TVI), la dichotomie, le théorème de la bijection, la racine n-ième et la fonction arctangente. Chaque notion est suivie d'exemples résolus, et six exercices corrigés terminent le chapitre.

Mathématiques 2ème Bac Sciences Mathématiques A BIOF - Programme marocain - Mis à jour le 18/11/2026

Objectifs du chapitre

- Calculer une limite et lever une forme indéterminée, y compris trigonométrique
- Étudier la continuité en un point, à droite, à gauche et sur un intervalle
- Déterminer l'image d'un intervalle, appliquer le TVI et la dichotomie
- Construire une fonction réciproque et calculer avec la racine n-ième, les puissances rationnelles et arctan

Avant de commencer

- Factorisation, identités remarquables et signe d'un quotient
- Fonctions usuelles et trigonométrie de 1ère Bac SM
- Intervalles, composition et raisonnement par implication

1. Rappels sur les limites et formes indéterminées

Limite finie en un point

Écrire $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ signifie que $f(x)$ devient aussi proche de ℓ qu'on le souhaite lorsque x est suffisamment proche de a, avec x dans le domaine de f et $x \neq a$. La valeur $f(a)$ peut être différente de ℓ, ou ne pas exister.

La formulation précise est : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |x - a| < \delta$ entraîne $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, pour les x du domaine. Une limite en $+\infty$ se lit de la même façon, en remplaçant « proche de a » par « suffisamment grand ». Une limite infinie signifie que les valeurs dépassent tout seuil positif, ou passent sous tout seuil négatif. Lorsqu'elle existe, la limite est unique, et les opérations sur les limites (somme, produit, quotient) s'appliquent tant qu'elles ne conduisent pas à une forme indéterminée.

Limites à gauche et à droite

Lorsque le domaine comporte des points de part et d'autre de a, la limite en a existe si et seulement si les limites à gauche et à droite existent et sont égales, y compris pour une même limite infinie.

Un dénominateur dont le signe change

Pour $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, le dénominateur tend vers 0.

1. Si $x < 2$, il est négatif : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$.
2. Si $x > 2$, il est positif : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$. Les deux limites diffèrent : f n'a pas de limite en 2, et la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale.

Situation	Outil adapté	Condition à vérifier
Somme, produit, quotient	Opérations sur les limites	Pour un quotient de limites finies, le dénominateur a une limite non nulle
Forme $\frac{0}{0}$	Factorisation, quantité conjuguée ou limite de référence	L'égalité transformée vaut près du point, en dehors du point
Forme $\frac{\infty}{\infty}$	Mise en facteur des termes dominants	Le passage se fait à l'infini
Forme $\infty - \infty$	Mise au même dénominateur ou quantité conjuguée	Les deux termes sont traités ensemble
Forme $0 \times \infty$	Réécriture en quotient	La nouvelle expression reste définie

Factoriser avant de remplacer

Au voisinage de 3, $\dfrac{x^2-9}{x-3} = x+3$ pour $x \neq 3$.

1. La limite est donc 6. On a simplifié une expression autour de 3 ; on n'a pas calculé une valeur en 3 de la fraction initiale.

Faire apparaître une différence utile

Pour $x > 0$, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

1. Le dénominateur tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$. La différence tend donc vers 0, bien que chacun des deux termes tende vers $+\infty$.

À l'infini, un polynôme est gouverné par son terme de plus haut degré. Ainsi $\dfrac{4x^3 - x + 2}{2x^3 + 5}$ tend vers 2 en $+\infty$ et en $-\infty$. En un point fini, cette règle ne s'applique pas : on cherche une factorisation locale.

Limites trigonométriques de référence

Avec x exprimé en radians : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Adapter une limite de référence

Pour $x \neq 0$, $\dfrac{\sin 3x}{x} = 3 \times \dfrac{\sin 3x}{3x}$. Quand $x \to 0$, $3x \to 0$, donc la limite vaut 3.

1. De même, $\dfrac{1-\cos 2x}{x^2} = 4 \times \dfrac{1-\cos 2x}{(2x)^2}$ tend vers $4 \times \dfrac{1}{2} = 2$.

1.1 Comparer et composer

Théorème des gendarmes

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ près du point étudié et si g et h ont la même limite ℓ, alors f tend vers ℓ.

Comparaison et limite infinie

Si $f(x) \geq g(x)$ au voisinage de $+\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Si $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ près du point étudié et si $g(x) \to 0$, alors $f(x) \to \ell$.

Mathfjib MATHFJIB.COM

Une oscillation contrôlée

Pour $x \neq 0$, $-x^2 \leq x^2 \sin\dfrac{1}{x} \leq x^2$.

1. Les deux bornes tendent vers 0 ; ainsi $x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ tend vers 0 quand $x \to 0$. L'oscillation du sinus n'empêche pas la limite, car son amplitude est multipliée par x^2.

Minorer pour conclure

Pour tout réel x, $x + \sin x \geq x - 1$, et $x - 1 \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

1. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(x + \sin x) = +\infty$, alors que $\sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Limite d'une composée

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et si g est continue en b, alors $\lim\limits_{x\to a} g\big(u(x)\big) = g(b)$. Plus généralement, si $u(x) \to b$ et si $g(X) \to \ell$ quand $X \to b$, alors $g\big(u(x)\big) \to \ell$; ici a, b et ℓ peuvent être finis ou infinis.

Une limite par composition

Quand $x \to +\infty$, $\dfrac{\pi x}{2x+1} \to \dfrac{\pi}{2}$.

1. Le cosinus étant continu en $\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right) = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.

2. Continuité en un point, à droite et à gauche

Continuité en a

Une fonction définie en a est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Elle est continue à droite en a si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, et continue à gauche en a si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Continuité et limites latérales

Une fonction définie de part et d'autre de a est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a. À une extrémité du domaine, on utilise seulement la limite du côté où la fonction est définie.

Méthode : Étudier la continuité en un point

1. Vérifier que $f(a)$ existe.
2. Calculer la limite de f en a, ou les deux limites à droite et à gauche si l'expression de f change en a.
3. Comparer avec $f(a)$: la continuité exige l'égalité. Si une étape échoue, f est discontinue en a.

Choisir un paramètre pour raccorder deux expressions

Soit $f(x) = x^2 + m$ si $x \leq 1$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ si $x > 1$. On a $f(1) = 1 + m$, et f est continue à gauche en 1 car $x \mapsto x^2 + m$ est un polynôme.

1. Pour $x > 1$, la quantité conjuguée donne $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \dfrac{(x+3)-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}$, qui tend vers $\dfrac{1}{4}$ quand $x \to 1^+$.
2. La continuité à droite en 1 impose $1 + m = \dfrac{1}{4}$, soit $m = -\dfrac{3}{4}$. Pour cette seule valeur, f est continue en 1.

2.1 Prolongement par continuité

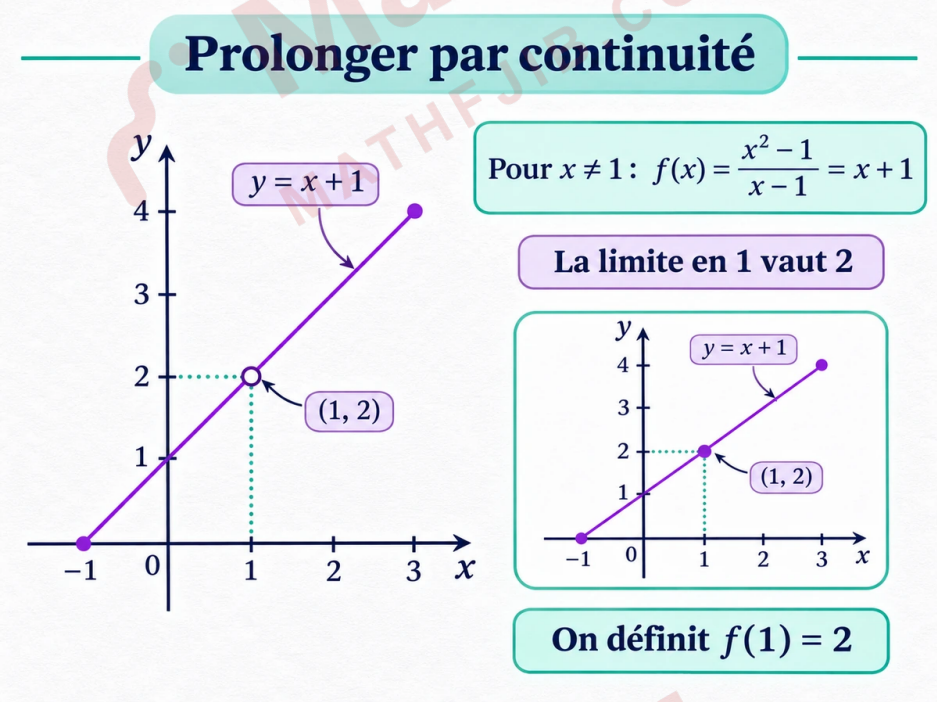
Prolongement par continuité

Si f n'est pas définie en a mais admet en a une limite finie ℓ, la fonction $\widetilde{f}$ définie par $\widetilde{f}(a) = \ell$ et $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \neq a$ est continue en a. On l'appelle le prolongement par continuité de f en a.

Combler un trou

La fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ est définie hors de 1, et $f(x) = x + 1$ pour $x \neq 1$: sa limite en 1 vaut 2.

1. Poser $\widetilde{f}(1) = 2$ fournit son unique prolongement continu en 1. Choisir une autre valeur, par exemple 0, laisserait une discontinuité.



Le quotient $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ tend vers 2 en 1 ; lui attribuer la valeur 2 en ce point comble le trou et rend le prolongement continu.

2.2 La fonction partie entière

Partie entière

Pour tout réel x, la partie entière $E(x)$ est l'unique entier k tel que $k \leq x < k + 1$. Par exemple $E(2{,}7) = 2$, $E(3) = 3$ et $E(-2{,}3) = -3$.

Sur chaque intervalle $[k, k+1[$, la fonction E est constante égale à k, donc continue. En un entier n, on a $\lim\limits_{x \to n^+} E(x) = n = E(n)$ mais $\lim\limits_{x \to n^-} E(x) = n - 1$. La partie entière est donc continue à droite et discontinue à gauche en chaque entier : c'est un exemple de fonction discontinue en une infinité de points. L'encadrement $x - 1 < E(x) \leq x$ sert souvent à calculer des limites.

3. Continuité sur un intervalle et opérations

Une fonction est continue sur un intervalle si elle est continue en chacun de ses points, avec une continuité à droite ou à gauche aux extrémités incluses. Les polynômes, ainsi que sin et cos, sont continus sur $\mathbb{R}$; une fraction rationnelle

est continue sur tout intervalle où son dénominateur ne s'annule pas ; la tangente l'est sur tout intervalle de son domaine, et la racine carrée sur $[0, +\infty[$. Graphiquement, la courbe d'une fonction continue sur un intervalle se trace sans lever le crayon.

Opérations sur les fonctions continues

Si f et g sont continues sur un intervalle I, alors $f+g$, fg, λf (avec λ réel) et $|f|$ sont continues sur I ; $\dfrac{f}{g}$ l'est si g ne s'annule pas sur I, et $\sqrt{f}$ l'est si $f \geq 0$ sur I.

Composée de deux fonctions continues

Si f est continue sur I, si g est continue sur J et si $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Justifier une continuité sans calcul de limite

La fonction $h(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ est continue sur $\mathbb{R}$: le polynôme $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ est continu et strictement positif, et la racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$.

1. La fonction $k(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, car $2 + \cos x \geq 1 > 0$: son dénominateur ne s'annule jamais.

4. Image d'un intervalle par une fonction continue

Image par une fonction continue

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Sur un segment $[a, b]$, une fonction continue atteint un minimum m et un maximum M, et son image est exactement $[m, M]$. Sans monotonie, les valeurs extrêmes ne sont pas forcément celles des extrémités : pour $f(x) = x^2$ sur $[-1, 2]$, l'image est $[0, 4]$.

Intervalle I	Image si f est strictement croissante	Image si f est strictement décroissante
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), f(a)\right]$
$]a, b]$	$\left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$
$]a, b[$	$\left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$
$[a, +\infty[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), f(a)\right]$

f est supposée continue et strictement monotone sur I ; une limite peut être infinie, et une borne n'est incluse que si elle est atteinte.

Image d'une demi-droite

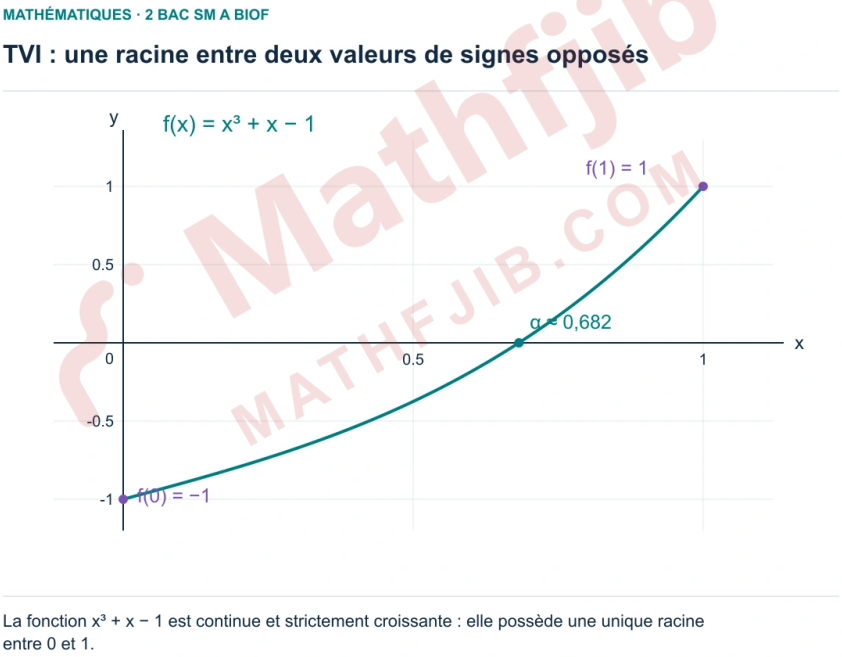
Soit $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ sur $[0, +\infty[$. Elle est continue et $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$: f est strictement croissante.

1. Comme $f(0) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, on obtient $f\big([0, +\infty[\big) = [-1, 1[$. La valeur 1 n'est jamais atteinte : $f(x) = 1$ équivaudrait à $x - 1 = x + 1$.

5. TVI : prouver qu'une équation possède une solution

Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue sur $[a, b]$, alors tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteint par f en au moins un point de $[a, b]$. En particulier, si $f(a)f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans $]a, b[$.



La fonction $f(x) = x^3 + x - 1$ est continue et strictement croissante : elle possède une unique racine entre 0 et 1.

Cas d'une fonction strictement monotone

Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]a, b[$. Plus généralement, pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique dans $[a, b]$.

Signe d'une fonction continue qui ne s'annule pas

Si f est continue sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I, alors f garde un signe constant sur I. Entre deux zéros consécutifs d'une fonction continue, une seule valeur calculée suffit donc à connaître le signe.

Existence, puis unicité

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$. On a $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$.

1. Le polynôme est continu : le TVI donne une racine $\alpha \in]0, 1[$.
2. La fonction $x \mapsto x^3 + x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; la racine est donc unique. En calculant $f(0{,}68) = -0{,}005568$ et $f(0{,}69) = 0{,}018509$, on obtient $0{,}68 < \alpha < 0{,}69$.

Une équation du type $f(x) = x$

Montrons que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Posons $g(x) = \cos x - x$, continue sur cet intervalle.

1. On a $g(0) = 1 > 0$ et $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2} < 0$. De plus $g'(x) = -\sin x - 1 < 0$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: g est strictement décroissante.

2. Le TVI et la stricte monotonie donnent une unique solution $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: c'est l'abscisse du point commun à la courbe du cosinus et à la droite d'équation $y = x$.

Méthode : Encadrer par dichotomie

1. Partir d'un intervalle $[a, b]$ où f est continue et change de signe.
2. Calculer le milieu $m = \dfrac{a+b}{2}$ puis $f(m)$. Si $f(m) = 0$, la solution est trouvée.
3. Sinon, conserver la moitié dont les extrémités donnent des valeurs de signes opposés. Après n étapes, la longueur de l'encadrement vaut $\dfrac{b-a}{2^n}$.

Attention

Le TVI prouve une existence, pas une unicité. Pour une solution unique, il faut un argument supplémentaire, par exemple une stricte monotonie sur l'intervalle concerné. Sans continuité, le TVI ne s'applique pas : la partie entière passe de 0 à 1 sur $[0, 1]$ sans prendre la valeur $\dfrac{1}{2}$.

6. Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone

Théorème de la bijection

Une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$. Sa réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue sur J et possède le même sens de variation que f.

Pour tout $x \in I$ et tout $y \in J$, $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$; ainsi $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ et $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$. Pour déterminer J, on suit les valeurs aux bornes de I, ou leurs limites si les bornes sont exclues. Dans un repère orthonormé, les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. L'écriture f^{-1} désigne ici une réciproque, et non $\dfrac{1}{f}$.

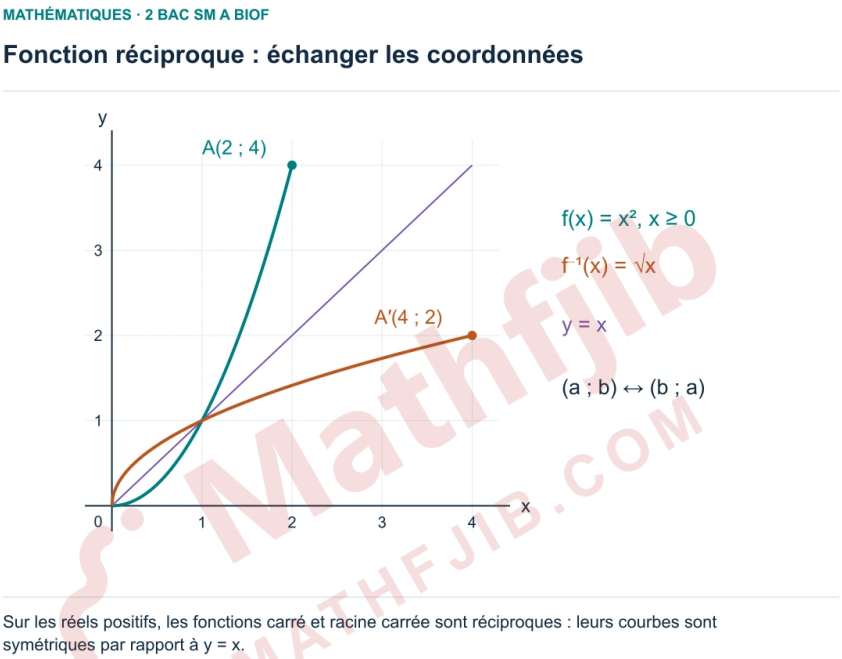
Méthode : Déterminer l'expression de la réciproque

1. Justifier que f est continue et strictement monotone sur I, puis calculer $J = f(I)$.
2. Pour $y \in J$, résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in I$.
3. Garder la solution qui appartient à I : elle définit $f^{-1}(y)$.
4. Vérifier une valeur simple, par exemple l'image d'une borne de J.

Réciproque d'une fonction du second degré restreinte

Soit $f(x) = x^2 - 2x$ sur $I = [1, +\infty[$. Comme $f(x) = (x-1)^2 - 1$, f est continue et strictement croissante sur I, et $J = f(I) = [-1, +\infty[$.

1. Pour $y \geq -1$, l'équation $(x-1)^2 - 1 = y$ avec $x \geq 1$ donne $x - 1 = \sqrt{y+1}$: on garde la racine positive, car $x - 1 \geq 0$.
2. Ainsi $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ pour $x \geq -1$. Contrôle : $f^{-1}(-1) = 1$ et $f(1) = -1$.



Sur les réels positifs, les fonctions carré et racine carrée sont réciproques : leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

7. Racine n-ième d'un réel positif

Racine n-ième

Soit n un entier avec $n \geq 2$. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, d'image $[0, +\infty[$. Sa réciproque est la fonction racine n-ième, notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$: $\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x$. Elle est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Règles de calcul

Pour $a \geq 0, b \geq 0$ et des entiers $n, m, p \geq 1$: $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$; $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ si $b > 0$; $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$; $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$; $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$. De plus, $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \iff a = b$ et $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \iff a < b$.

Résoudre l'équation $x^n = a$

Si n est impair, l'équation $x^n = a$ possède une unique solution réelle : $\sqrt[n]{a}$ si $a \geq 0$, et $-\sqrt[n]{-a}$ si $a < 0$. Si n est pair, elle possède deux solutions $\sqrt[n]{a}$ et $-\sqrt[n]{a}$ si $a > 0$, la seule solution 0 si $a = 0$, et aucune solution si $a < 0$.

Simplifier et résoudre

$\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{64} = 4$ et $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.

1. L'équation $x^4 = 81$ a pour solutions 3 et -3 ; l'équation $x^3 = -8$ a pour unique solution $-\sqrt[3]{8} = -2$; l'équation $x^4 = -1$ n'a pas de solution réelle.

Limites avec une racine n-ième

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$. Si $u \geq 0$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{\ell}$; si $u(x) \to +\infty$, alors $\sqrt[n]{u(x)} \to +\infty$.

Une quantité conjuguée pour la racine cubique

Pour lever la forme $\frac{0}{0}$ dans $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$, on pose $a=\sqrt[3]{x}$, de sorte que $x-1=a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$.

1. Pour $x\neq 1$, $\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{a^2+a+1}$. Quand $x\to 1$, $a\to 1$, donc la limite vaut $\frac{1}{3}$. L'identité $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ joue ici le rôle de la quantité conjuguée.

7.1 Puissances rationnelles d'un réel strictement positif

Pour $x>0$ et $r=\dfrac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$, on pose $x^r=\sqrt[q]{x^p}$; cette valeur ne dépend pas de l'écriture choisie pour la fraction r. Pour $x>0, y>0$ et $r,r'\in\mathbb{Q}$: $x^rx^{r'}=x^{r+r'}$, $(x^r)^{r'}=x^{rr'}$, $(xy)^r=x^ry^r$, $\dfrac{x^r}{x^{r'}}=x^{r-r'}$ et $x^{-r}=\dfrac{1}{x^r}$. Le domaine strictement positif évite les ambiguïtés de signe des racines d'indice pair.

Calculer avec des exposants fractionnaires

$8^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[3]{8}\right)^2=4$ et $16^{-\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3}=\dfrac{1}{8}$.

1. De même, $\dfrac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}}{\sqrt[6]{32}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$.

8. La fonction arctangente

Arctangente

La restriction de la tangente à $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ est continue et strictement croissante, et son image est $\mathbb{R}$. Sa réciproque est la fonction arctan : $\mathbb{R}\to\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. Pour $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$: $\arctan x=y\iff\tan y=x$.

Propriétés de l'arctangente

La fonction arctan est continue, strictement croissante et impaire sur $\mathbb{R}$: $\arctan(-x)=-\arctan x$. On a $\arctan 0=0$, $\arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$, $\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$ et $\arctan\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$. Ses limites sont $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$, et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$.

La dernière limite se démontre par changement de variable : si $t=\arctan x$, alors $x=\tan t$ et $t\to 0$ quand $x\to 0$, donc $\dfrac{\arctan x}{x}=\dfrac{t}{\tan t}\to 1$. Pour tout réel x, $\tan(\arctan x)=x$; comme $\cos(\arctan x)>0$, la relation $1+\tan^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t}$ donne $\cos(\arctan x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Les droites d'équations $y=\dfrac{\pi}{2}$ et $y=-\dfrac{\pi}{2}$ sont asymptotes à la courbe de arctan.

Choisir l'angle dans le bon intervalle

Puisque $\tan\dfrac{\pi}{4}=1$, on a $\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$.

1. Mais $\arctan\left(\tan\dfrac{3\pi}{4}\right)=\arctan(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$, car $\dfrac{3\pi}{4}$ n'appartient pas à $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. L'égalité $\arctan(\tan t)=t$ n'est vraie que pour t dans cet intervalle.

Une identité à connaître

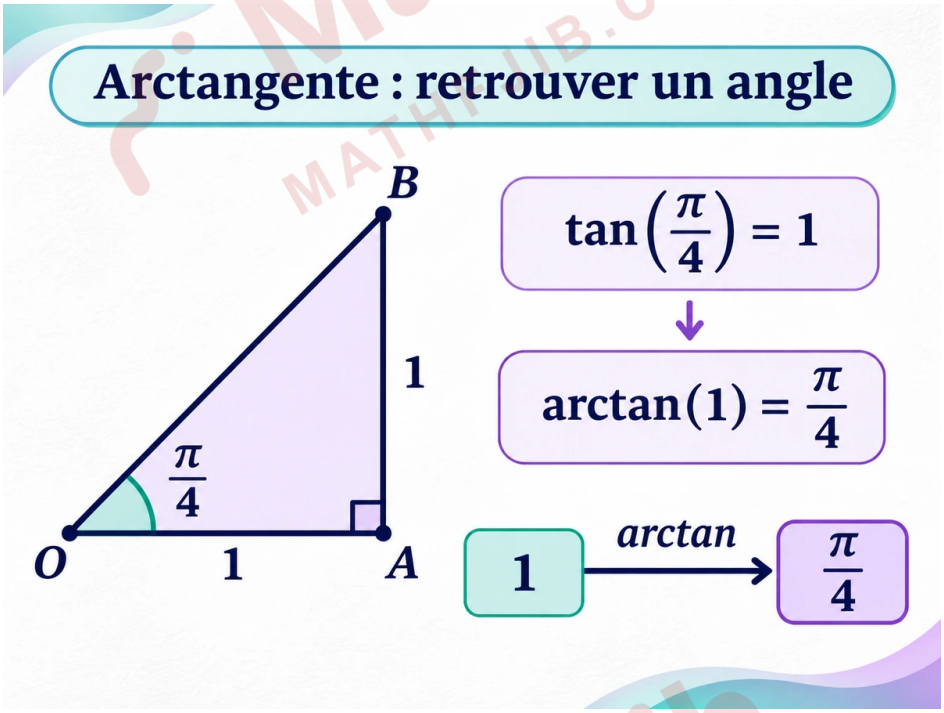
Pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$; pour tout $x < 0$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$.

Preuve pour $x > 0$: posons $t = \arctan x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Alors $\dfrac{\pi}{2} - t$ appartient aussi à $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \dfrac{1}{\tan t} = \dfrac{1}{x}$, donc $\arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} - t$. Le cas $x < 0$ s'en déduit par imparité.

Résoudre avec arctan

L'équation $\arctan x = \dfrac{\pi}{3}$ a pour unique solution $x = \tan \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

1. L'inéquation $\arctan x < \dfrac{\pi}{4}$ équivaut à $x < 1$, car arctan est strictement croissante et $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$.



Dans un triangle rectangle de côtés perpendiculaires égaux, $\tan \dfrac{\pi}{4} = 1$; l'arctangente associe donc au réel 1 l'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

Remarque

Le programme de 2 Bac SM étudie seulement l'arctangente parmi les fonctions trigonométriques réciproques : les fonctions arcsinus et arccosinus sont hors programme.

Je retiens

- En a, la continuité impose l'existence de $f(a)$ et l'égalité $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; elle équivaut à la continuité à droite et à gauche.
- Une forme indéterminée se lève par une transformation : factorisation, quantité conjuguée, limite de référence ou encadrement.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle ; celle d'un segment est un segment.
- Le TVI donne l'existence d'une solution ; la stricte monotonie donne son unicité.
- Une fonction continue et strictement monotone sur I admet une réciproque continue, de même sens de variation, définie sur $f(I)$.

- Pour $a, b \geq 0$, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$, et $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ pour $x > 0$.
- arctan prend ses valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$.

Mathfjib
MATHFJIB.COM
Mathfjib
MATHFJIB.COM

Exercices - À chercher avant la correction

Cherchez chaque exercice sur votre cahier avant de lire sa correction. Justifiez chaque étape et citez le théorème utilisé, avec ses hypothèses.

Exercice 1. Continuité d'une fonction définie par morceaux

Facile

Soit a un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}$ si $x < 0$ et $f(x) = x^2 + a$ si $x \geq 0$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
2. Déterminer a pour que f soit continue en 0.
3. Pour cette valeur, justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Limites avec racines n-ièmes et arctangente

Facile

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3 + 1}}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan 2x}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan\left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)$

Exercice 3. Image d'un intervalle et fonction réciproque

Intermédiaire

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

1. Montrer que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $f(\mathbb{R})$.
3. En déduire que f admet une réciproque f^{-1}, puis déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in f(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Trois solutions et une dichotomie

Intermédiaire

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Calculer $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions réelles.
3. Par dichotomie, encadrer la solution β située dans $]0, 1[$ par un intervalle de longueur $0{,}125$.

Exercice 5. Somme de deux arctangentes

Approfondissement

1. Justifier que $\arctan \dfrac{1}{2}$ et $\arctan \dfrac{1}{3}$ appartiennent à $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$.

2. Calculer $\tan\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}\right)$, puis en déduire que $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.
3. En déduire la valeur de $\arctan 2+\arctan 3$.

Exercice 6. Partie entière : limites et continuité

Approfondissement

On note $E(x)$ la partie entière du réel x.

1. Montrer que, pour tout réel x, $x-1<E(x)\leq x$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{E(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. Soit $g(x)=E(x)+\left(x-E(x)\right)^2$. Montrer que g est continue en tout entier n, puis sur $\mathbb{R}$.

Mathfjib MATHFJIB.COM
Mathfjib MATHFJIB.COM

Corrections expliquées des exercices

Exercice 1. Continuité d'une fonction définie par morceaux

1. Pour $x < 0$, $\dfrac{\sin 2x}{x} = 2 \times \dfrac{\sin 2x}{2x}$. Quand $x \to 0^-$, $2x \to 0$ et $\dfrac{\sin 2x}{2x} \to 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$. À droite, $f(x) = x^2 + a \to a$.

2. On a $f(0) = a$: f est continue à droite en 0 pour tout a. Elle est continue à gauche si et seulement si $a = 2$. La seule valeur qui convient est donc $a = 2$.

3. Sur $]-\infty, 0[$, f est le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas ; sur $]0, +\infty[$, c'est un polynôme. Avec la continuité en 0, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Limites avec racines n-ièmes et arctangente

1. Pour $x > 0$, $\sqrt[3]{8x^3+1} = \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{8 + \dfrac{1}{x^3}} = x\sqrt[3]{8 + \dfrac{1}{x^3}}$. Le quotient vaut donc $\sqrt[3]{8 + \dfrac{1}{x^3}}$, qui tend vers $\sqrt[3]{8} = 2$.

2. $\dfrac{\arctan 2x}{x} = 2 \times \dfrac{\arctan 2x}{2x}$ et $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\arctan t}{t} = 1$. La limite vaut 2.

3. $\dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x} \to +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \arctan X = \dfrac{\pi}{2}$. Par composition, la limite vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 3. Image d'un intervalle et fonction réciproque

1. f est continue comme quotient de fonctions continues, le dénominateur étant strictement positif. Elle est dérivable et $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \to 1$ en $+\infty$. Pour $x < 0$, $\sqrt{x^2+1} = -x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$, donc $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \to -1$ en $-\infty$. Comme f est continue et strictement croissante, $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$.

3. f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. Pour $y \in]-1, 1[$, l'équation $f(x) = y$ impose que x et y aient le même signe et donne $y^2(x^2+1) = x^2$, soit $x^2 = \dfrac{y^2}{1-y^2}$. On garde la racine de même signe que y : $x = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$. Ainsi $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in]-1, 1[$.

Exercice 4. Trois solutions et une dichotomie

1. $f(-2) = -1$, $f(-1) = 3$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$ et $f(2) = 3$.

2. f est continue, car c'est un polynôme, et change de signe sur $[-2, -1]$, sur $[0, 1]$ et sur $[1, 2]$. Le TVI donne au moins une solution dans chacun des intervalles $]-2, -1[$, $]0, 1[$ et $]1, 2[$, qui sont disjoints. Un polynôme de degré 3 a au plus trois racines : il y en a donc exactement trois.

3. $f(0{,}5) = -0{,}375 < 0$ et $f(0) = 1 > 0$, donc $\beta \in]0\,;0{,}5[$. Puis $f(0{,}25) = 0{,}265625 > 0$, donc $\beta \in]0{,}25\,;0{,}5[$. Enfin $f(0{,}375) \approx -0{,}0723 < 0$, donc $0{,}25 < \beta < 0{,}375$, un encadrement de longueur $0{,}125$.

Exercice 5. Somme de deux arctangentes

1. arctan est strictement croissante et $0 < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} < 1$, donc $0 = \arctan 0 < \arctan\dfrac{1}{3} < \arctan\dfrac{1}{2} < \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Posons $a = \arctan\dfrac{1}{2}$ et $b = \arctan\dfrac{1}{3}$. La formule d'addition donne $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$. Comme $a + b \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et que la tangente est injective sur cet intervalle, $a + b = \dfrac{\pi}{4}$.

3. Pour $x > 0$, $\arctan x = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{1}{x}$. Donc $\arctan 2 + \arctan 3 = \pi - \left(\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3}\right) = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$.

Exercice 6. Partie entière : limites et continuité

1. Par définition, $E(x) \leq x < E(x)+1$. La seconde inégalité donne $x-1 < E(x)$.

2. Pour $x > 0$, en divisant par x : $1 - \dfrac{1}{x} < \dfrac{E(x)}{x} \leq 1$. Les deux bornes tendent vers 1 en $+\infty$: par encadrement, la limite vaut 1. Pour $x > 0$, l'encadrement appliqué à $\dfrac{1}{x}$ donne $\dfrac{1}{x} - 1 < E\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq \dfrac{1}{x}$, puis, en multipliant par $x > 0$, $1 - x < x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$. Quand $x \to 0^+$, la limite vaut 1.

3. Soit n un entier. Pour $x \in [n, n+1[$, $g(x) = n+(x-n)^2$, qui tend vers $n = g(n)$ quand $x \to n^+$. Pour $x \in [n-1, n[$, $g(x) = n-1+(x-n+1)^2$, qui tend vers $n-1+1 = n$ quand $x \to n^-$. Ainsi g est continue en n. Entre deux entiers consécutifs, g est un polynôme, donc continue : g est continue sur $\mathbb{R}$, alors que E ne l'est pas.

Questions fréquentes

Comment montrer qu'une fonction est continue en un point en 2 Bac SM ?

Vérifier que $f(a)$ existe, calculer la limite de f en a, ou les limites à droite et à gauche si l'expression change en a, puis montrer qu'elle est égale à $f(a)$. Si l'une de ces étapes échoue, la fonction est discontinue en a.

Comment déterminer la fonction réciproque d'une fonction ?

Montrer que f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, calculer $J = f(I)$, puis résoudre $f(x) = y$ pour $y \in J$ en gardant la solution qui appartient à I. Cette solution est $f^{-1}(y)$.

Comment prouver qu'une équation admet une unique solution ?

Sur l'intervalle étudié, justifier la continuité, utiliser le TVI pour l'existence grâce à un changement de signe, puis établir la stricte monotonie pour l'unicité. La dichotomie permet ensuite d'encadrer cette solution.

Que vaut $\arctan x + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **?**

Pour $x > 0$, la somme vaut $\dfrac{\pi}{2}$; pour $x < 0$, elle vaut $-\dfrac{\pi}{2}$. On le démontre en posant $t = \arctan x$ et en remarquant que $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \dfrac{1}{x}$.

Une fonction peut-elle avoir une limite sans être continue ?

Oui. Elle peut ne pas être définie au point considéré, ou y avoir une valeur différente de sa limite. La continuité impose que cette valeur existe et coïncide avec la limite.

MATHFJIB - Mathématiques 2 Bac SM A
Suivez les consignes et la progression de votre professeur.
Retrouver le cours, ses illustrations et les exercices corrigés en ligne.