COURS ILLUSTRÉ - LYCÉE - 2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES A - SEMESTRE 1

Suites numériques

Une suite numérique associe un réel u_n à chaque entier n à partir d'un rang fixé. Étudier une suite en 2 Bac SM A consiste à comprendre comment ses termes évoluent et à prouver leur comportement à long terme. Une liste de valeurs ou un graphique suggère une limite ; la récurrence, les comparaisons et les théorèmes de convergence permettent de la démontrer. Ce cours de suites numériques présente les limites de référence, les critères de convergence, les suites adjacentes, les suites récurrentes et l'encadrement d'une aire, avec des exemples résolus et six exercices corrigés.

Mathématiques 2ème Bac Sciences Mathématiques A BIOF - Programme marocain - Mis à jour le 18/11/2026

Objectifs du chapitre

- Utiliser les suites arithmétiques et géométriques et calculer des sommes
- Prouver des bornes et une monotonie par récurrence
- Déterminer une limite avec les suites de référence, l'ordre et les critères de convergence
- Étudier les suites récurrentes, les suites adjacentes et encadrer une aire par des rectangles

Avant de commencer

- Calcul algébrique, inégalités et puissances
- Raisonnement par récurrence
- Limites, continuité et accroissements finis

1. Définition explicite, récurrence et rang initial

Suite explicite ou récurrente

Une expression explicite donne u_n directement en fonction de n. Une définition récurrente donne un terme initial, par exemple u_0, puis une relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour calculer u_3 dans le second cas, on passe successivement par u_1 puis u_2.

Le rang initial intervient dans toutes les formules. Si $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$, alors $u_n = 2 + 3n$. Avec $u_1 = 2$, la formule devient $u_n = 2 + 3(n-1)$. Le décalage d'un rang est une source fréquente d'erreur dans les sommes.

Famille	Terme général à partir de u_0	Somme de u_0 à u_n
Arithmétique de raison r	$u_n = u_0 + nr$	$\dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$
Géométrique de raison q	$u_n = u_0 q^n$	$u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

Compter les termes avant de sommer

La somme $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ contient $n+1$ termes.

1. Elle vaut $\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et tend vers 2. Si l'on commence à l'exposant 1, le premier terme 1 est absent et la somme tend vers 1.

2. Monotonie et bornes : les deux contrôles fondamentaux

Suite monotone et suite bornée

Une suite est croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout rang considéré, et décroissante si l'inégalité est inversée. Elle est majorée si un réel M vérifie $u_n \leq M$ pour tous ces rangs, minorée si un réel m vérifie $u_n \geq m$, et bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Méthode : Choisir une méthode de monotonie

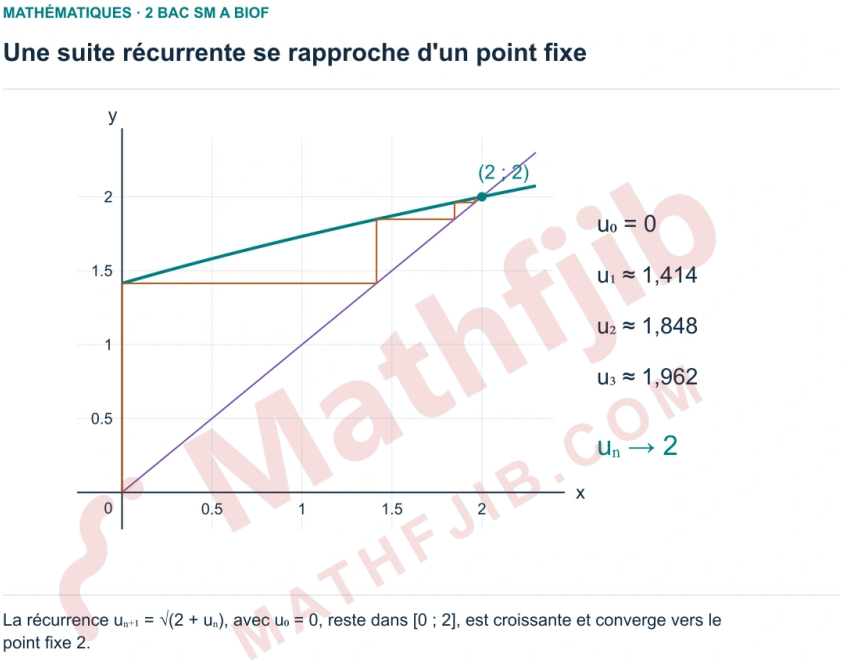
1. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$; cette méthode ne demande pas que les termes soient positifs.
2. Si les termes sont strictement positifs, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
3. Pour une suite explicite $u_n = f(n)$, les variations de f sur $[0, +\infty[$ peuvent suffire. Pour une récurrence, étudier $f(x) - x$ sur un intervalle contenant tous les termes, ou utiliser la croissance de f par récurrence.

2.1 Une preuve de récurrence entièrement rédigée

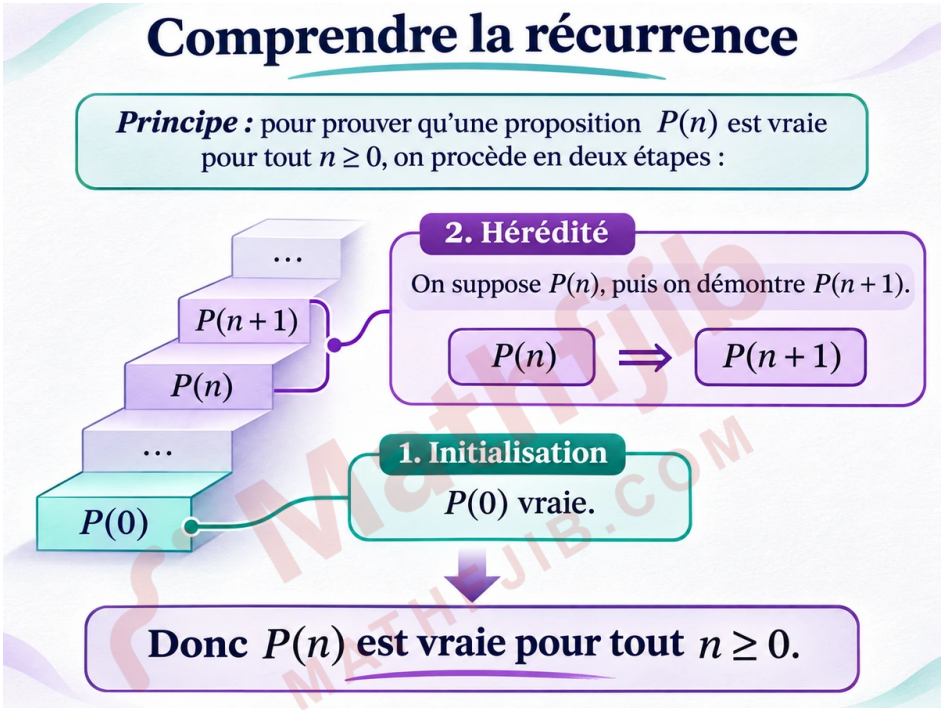
Une suite qui reste dans son intervalle

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Montrons $0 \leq u_n \leq 2$.

1. Initialisation : $u_0 = 0$ appartient à $[0, 2]$.
2. Hérédité : si $0 \leq u_n \leq 2$, alors $2 \leq 2 + u_n \leq 4$; la racine étant croissante, $0 \leq \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$.
3. La propriété est donc vraie pour tout $n \geq 0$, et la suite est bien définie. De plus $u_1 \geq u_0$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{2 + x}$ est croissante : une seconde récurrence donne $u_{n+1} \geq u_n$.



La récurrence $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, avec $u_0 = 0$, reste dans $[0, 2]$, est croissante et converge vers le point fixe 2.



Une preuve par récurrence vérifie le premier rang puis démontre que la propriété au rang n entraîne celle au rang $n+1$.

3. Limite d'une suite et suites de référence

Suite convergente

La suite (u_n) tend vers le réel ℓ si tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. De façon équivalente : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que $n \geq N$ implique $|u_n - \ell| < \varepsilon$. La suite est alors convergente, et sa limite est unique. Une suite qui n'est pas convergente est divergente.

Limite infinie

La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang. Elle tend vers $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty, A[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang. Une suite divergente peut tendre vers un infini ou n'avoir aucune limite.

Lorsque $u_n = f(n)$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, finie ou infinie, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. Ce lien permet d'utiliser toutes les limites de fonctions en $+\infty$. La définition elle-même sert surtout à démontrer des propriétés : dans les exercices, on utilise les suites de référence et les critères de convergence.

Utiliser la définition sur un exemple

Pour $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$, on a $|u_n - 2| = \dfrac{1}{n+1}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Dès que $n + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, on a $|u_n - 2| < \varepsilon$: la suite tend vers 2. On retrouve la limite donnée par le quotient des termes dominants.

Suite de référence	Limite
n^r avec $r \in \mathbb{Q}, r > 0$ (par exemple n^2, $\sqrt{n}$)	$+\infty$
n^r avec $r \in \mathbb{Q}, r < 0$ (par exemple $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$)	0
a^n avec $a > 1$	$+\infty$
a^n avec $a = 1$	1
a^n avec $-1 < a < 1$	0
a^n avec $a \leq -1$	Pas de limite

Ces limites sont considérées comme des limites usuelles.

Pour $a > 1$, on écrit $a = 1 + h$ avec $h > 0$. L'inégalité de Bernoulli $(1+h)^n \geq 1 + nh$, prouvée par récurrence, donne $a^n \geq 1 + nh$, qui tend vers $+\infty$. Pour $0 < |a| < 1$, on applique ce résultat à $\frac{1}{|a|} > 1$: $|a|^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{|a|}\right)^n} \to 0$.

Pour $a = -1$, les termes alternent entre 1 et -1 ; pour $a < -1$, ils alternent de signe et leur valeur absolue tend vers $+\infty$.

4. Opérations, ordre et critères de convergence

Les règles de somme, de produit et de quotient de limites sont les mêmes que pour les fonctions, avec les mêmes formes indéterminées. Pour un quotient, la limite du dénominateur doit être non nulle. Une suite convergente est bornée ; une suite bornée n'est pas nécessairement convergente, comme le montre $((-1)^n)$.

Limites et ordre

Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si les deux suites convergent vers ℓ et ℓ', alors $\ell \leq \ell'$. En particulier, si $u_n < a$ pour tout n et si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell \leq a$: le passage à la limite transforme une inégalité stricte en inégalité large, comme pour $\frac{1}{n} > 0$ dont la limite est 0.

Critères de convergence

Gendarmes : si $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si (v_n) et (w_n) tendent vers ℓ, alors $u_n \to \ell$. Si $|u_n - \ell| \leq v_n$ et $v_n \to 0$, alors $u_n \to \ell$. Si $u_n \geq v_n$ et $v_n \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$; si $u_n \leq v_n$ et $v_n \to -\infty$, alors $u_n \to -\infty$.

Une oscillation dont l'amplitude diminue

Pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{\sin n}{n}$ vérifie $|u_n| \leq \frac{1}{n}$, et $\frac{1}{n} \to 0$.

1. Donc $u_n \to 0$. On n'a pas eu besoin d'étudier les variations des termes.

Une minoration suffit

Pour $u_n = n + (-1)^n$, on a $u_n \geq n - 1$ pour tout n, et $n - 1 \to +\infty$.

1. Donc $u_n \to +\infty$, bien que la suite ne soit pas croissante : $u_2 = 3$ et $u_3 = 2$.

5. Le théorème de convergence monotone

Suite monotone et bornée

Une suite croissante et majorée converge vers un réel. Une suite décroissante et minorée converge aussi. Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$; une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Ce théorème prouve l'existence de la limite sans en donner directement la valeur. Si (u_n) est croissante et majorée par M, sa limite ℓ vérifie $u_n \leq \ell \leq M$ pour tout n. C'est seulement après cette étape que l'on peut passer à la limite dans une récurrence, à condition que la fonction utilisée soit continue au point limite.

Terminer l'étude de la suite radicale

La suite $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$, avec $u_0 = 0$, est croissante et majorée par 2. Elle converge donc vers un réel $\ell \in [0, 2]$.

1. Par continuité de la racine, $\ell = \sqrt{2+\ell}$, donc $\ell^2 - \ell - 2 = 0$. Les candidats sont 2 et -1. La condition $\ell \geq 0$ élimine -1 : la limite vaut 2.

Attention

Résoudre $\ell = f(\ell)$ ne prouve pas qu'une suite converge. Il faut d'abord justifier cette convergence et vérifier que f est continue à la limite. Un point fixe peut exister sans que toutes les suites récurrentes y convergent.

6. Suites adjacentes et approximation d'un réel

Suites adjacentes

Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème des suites adjacentes

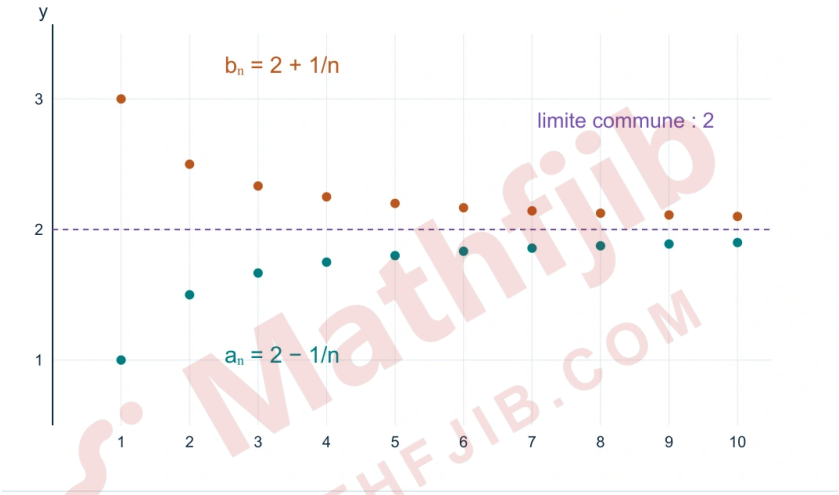
Deux suites adjacentes convergent vers une même limite ℓ. Si (u_n) est la suite croissante et (v_n) la décroissante, alors $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout n.

Preuve : la suite $w_n = v_n - u_n$ est décroissante, comme différence d'une suite décroissante et d'une suite croissante, et tend vers 0 ; elle est donc positive. On en déduit $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$: (u_n) est croissante et majorée par v_0, (v_n) est décroissante et minorée par u_0. Les deux suites convergent, et leurs limites sont égales puisque leur différence tend vers 0.

Mathfjib MATHFJIB.COM

MATHÉMATIQUES · 2 BAC SM A BIOF

Suites adjacentes : deux côtés d'une même limite



Les suites 2 − 1/n et 2 + 1/n sont adjacentes : l'une croît, l'autre décroît, et leur écart 2/n tend vers zéro.

Les suites $\left(2-\frac{1}{n}\right)$ et $\left(2+\frac{1}{n}\right)$ sont adjacentes : l'une croît, l'autre décroît, et leur écart $\frac{2}{n}$ tend vers 0.

Un encadrement explicite

Pour $n \geq 1$, $a_n = 2-\frac{1}{n}$ et $b_n = 2+\frac{1}{n}$ sont respectivement croissante et décroissante. Comme $b_n - a_n = \frac{2}{n} \to 0$, elles sont adjacentes et leur limite commune est 2.

1. Le nombre cherché est encadré avec une largeur $\frac{2}{n}$. Pour une largeur au plus égale à $0{,}01$, il suffit donc de prendre $n \geq 200$.

Approcher un réel par des décimaux

Pour $x = \sqrt{2}$, posons $a_n = \dfrac{E\left(10^n\sqrt{2}\right)}{10^n}$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{10^n}$, les approximations décimales par défaut et par excès d'ordre n.

1. La suite (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et $b_n - a_n = 10^{-n} \to 0$: elles sont adjacentes et convergent vers $\sqrt{2}$. Par exemple $a_2 = 1{,}41 \leq \sqrt{2} < b_2 = 1{,}42$.

La dichotomie fournit un autre exemple : les bornes gauches croissent, les bornes droites décroissent et la longueur de l'intervalle est divisée par 2 à chaque étape. Les deux suites de bornes sont adjacentes et convergent vers la solution cherchée.

7. Suites récurrentes et composée d'une suite et d'une fonction

Limite d'une suite récurrente

Soit f continue sur un intervalle I avec $f(I) \subset I$, et (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers un réel ℓ appartenant à I, ce qui est le cas lorsque I est un segment, alors $f(\ell) = \ell$: la limite est un point fixe de f.

Limite de la composée d'une suite et d'une fonction continue

Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors la suite $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.

Composer une limite de suite

Pour $u_n = \dfrac{n}{n+1}$, on a $u_n \to 1$. La fonction arctan étant continue en 1, $\arctan\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \to \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

1. De même, $\sqrt{4+\dfrac{1}{n}} \to \sqrt{4} = 2$, par continuité de la racine carrée en 4.

Méthode : Étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

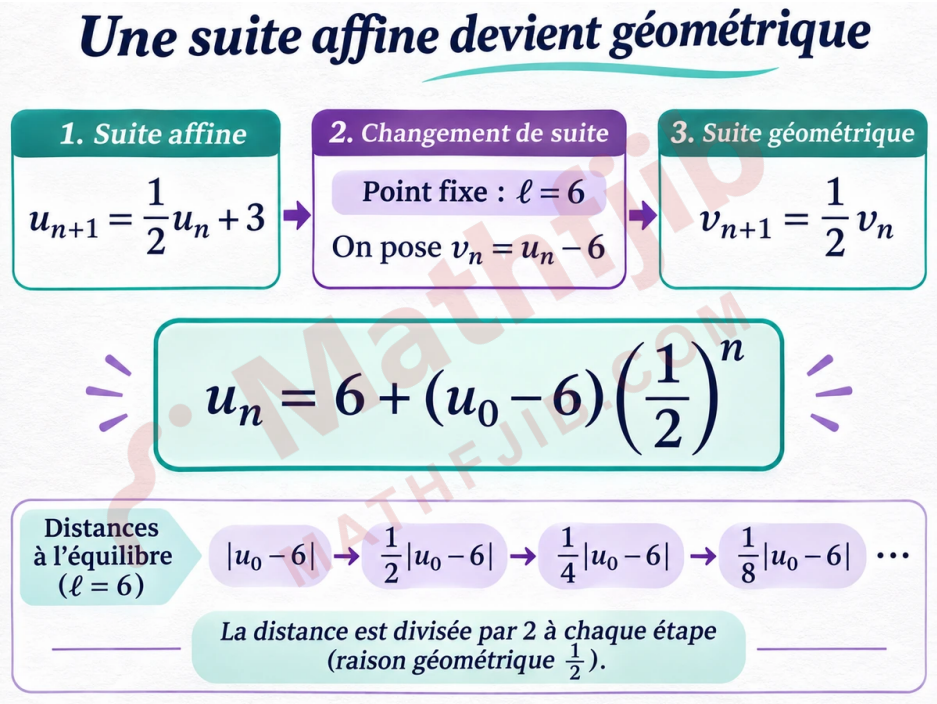
1. Chercher un intervalle I stable par f et montrer par récurrence que $u_n \in I$ pour tout n.
2. Étudier la monotonie : signe de $f(x) - x$ sur I, ou croissance de f avec une récurrence.
3. Conclure à la convergence par le théorème de convergence monotone, ou par une contraction.
4. Identifier la limite parmi les solutions de $f(x) = x$ situées dans I. Une figure en escalier ou en colimaçon, tracée avec la courbe de f et la droite $y = x$, aide à prévoir le comportement.

8. Changer de suite pour simplifier une récurrence

Récurrence affine

Pour $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$, le point fixe vaut 6. En posant $v_n = u_n - 6$, on obtient $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$.

1. Ainsi $u_n = 6 + (u_0 - 6)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $u_n \to 6$. Le changement de variable a transformé une récurrence affine en suite géométrique.



Pour $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$, le point fixe est 6 ; poser $v_n = u_n - 6$ donne $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$.

Récurrence homographique

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$. La fonction associée envoie $[0, 1]$ dans $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, donc la suite reste définie dans $[0, 1]$.

1. En posant $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$, un calcul direct donne $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{3}$. Puisque $v_0 = -1$, $v_n = -\dfrac{1}{3^n}$ et $u_n = \dfrac{1 - 3^{-n}}{1 + 3^{-n}} \to 1$.

9. Encadrer une aire par la méthode des rectangles

L'aire sous la parabole sur [0, 1]

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine limité par la courbe de $f(x) = x^2$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$. On partage $[0, 1]$ en n intervalles de largeur $\dfrac{1}{n}$. Comme f est croissante sur $[0, 1]$, les rectangles construits à gauche sont sous la courbe et ceux construits à droite la recouvrent : $s_n \leq \mathcal{A} \leq S_n$, avec $s_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2$ et $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$.

1. Avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on obtient $S_n = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$ et $s_n = S_n - \dfrac{1}{n} = \dfrac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.
2. Les deux suites tendent vers $\dfrac{1}{3}$, donc $\mathcal{A} = \dfrac{1}{3}$ unité d'aire. Pour $n = 10$, l'encadrement donne déjà $0{,}285 \leq \mathcal{A} \leq 0{,}385$. Le calcul intégral du second semestre retrouvera ce résultat directement.

10. Suites définies implicitement et contrôle de l'erreur

Une suite peut être définie par une équation : u_n est l'unique solution de $f_n(x) = 0$ dans un intervalle donné. On prouve l'existence et l'unicité par continuité et stricte monotonie. Pour comparer u_n et u_{n+1}, on étudie le signe de $f_{n+1}(u_n)$, puis on utilise les variations de f_{n+1}. Un encadrement, ou une estimation $|u_n - \ell| \leq Cq^n$ avec $0 < q < 1$, donne ensuite une précision numérique. Les premières valeurs calculées restent un outil d'observation, jamais une preuve pour tous les rangs.

Je retiens

- Une récurrence commence par l'initialisation et précise l'hypothèse d'hérédité.
- $q^n \to 0$ si $|q| < 1$, $q^n \to +\infty$ si $q > 1$; $n^r \to +\infty$ si $r > 0$ et $n^r \to 0$ si $r < 0$.
- Croissance et majoration, ou décroissance et minoration, prouvent la convergence.
- Le passage à la limite conserve les inégalités larges et transforme les inégalités strictes en inégalités larges.
- Deux suites adjacentes convergent vers le même réel et l'encadrent à chaque rang.
- Si $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.
- Si $u_n \to \ell$ et si f est continue en ℓ, alors $f(u_n) \to f(\ell)$.

Exercices - À chercher avant la correction

Cherchez chaque exercice sur votre cahier avant de lire sa correction. Justifiez chaque étape et citez le théorème utilisé, avec ses hypothèses.

Exercice 1. Limites de suites usuelles

Facile

Déterminer la limite de chaque suite.

1. $u_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$
2. $v_n = \dfrac{n^2 + \sqrt{n}}{2n^2 + 1}$
3. $w_n = n^{\frac{2}{3}} - n$
4. $z_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$

Exercice 2. Suite arithmético-géométrique

Facile

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1$.

1. Montrer que $v_n = u_n - 3$ définit une suite géométrique.
2. Exprimer u_n en fonction de n et calculer sa limite.
3. Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Exercice 3. Étude complète d'une suite récurrente

Intermédiaire

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{x^2 + 6}{5}$.

1. Montrer que $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout n.
2. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 2)(u_n - 3)}{5}$ et en déduire que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 4. Deux suites adjacentes

Intermédiaire

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.
2. Montrer que les deux suites sont adjacentes.
3. En déduire qu'elles convergent vers une même limite ℓ et donner un encadrement de ℓ avec $n = 4$.

Mathfjib MATHFJIB.COM

Exercice 5. Suite homographique à point fixe double

Approfondissement

Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1}$.

1. Montrer que $u_n > 1$ pour tout n.
2. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$. Montrer que (v_n) est arithmétique.
3. En déduire u_n en fonction de n et la limite de (u_n).

Exercice 6. Une suite définie par une équation

Approfondissement

Pour $n \geq 1$, on considère $f_n(x) = x^n + x - 1$ sur $[0, 1]$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n dans $]0, 1[$. Calculer u_1 et u_2.
2. Calculer $f_{n+1}(u_n)$ et en déduire que (u_n) est croissante.
3. Montrer que (u_n) converge, puis que sa limite vaut 1.

Mathfjib MATHFJIB.COM
Mathfjib MATHFJIB.COM

Corrections expliquées des exercices

Exercice 1. Limites de suites usuelles

1. En divisant par 3^n : $u_n = \dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$. Comme $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \to 0$ et $u_n \to 1$.

2. En divisant par n^2 : $v_n = \dfrac{1+n^{-\frac{3}{2}}}{2+\frac{1}{n^2}} \to \dfrac{1}{2}$.

3. $w_n = n\left(n^{-\frac{1}{3}}-1\right)$. Comme $n^{-\frac{1}{3}} \to 0$, le second facteur tend vers -1 et $w_n \to -\infty$.

4. $|z_n| = \dfrac{1}{n} \to 0$, donc $z_n \to 0$.

Exercice 2. Suite arithmético-géométrique

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \dfrac{2}{3}u_n - 2 = \dfrac{2}{3}(u_n - 3) = \dfrac{2}{3}v_n$: (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = -3$.

2. $v_n = -3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, donc $u_n = 3 - 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Comme $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, $u_n \to 3$.

3. $S_n = 3(n+1) - 3\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 3(n+1) - 9\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$.

Exercice 3. Étude complète d'une suite récurrente

1. $u_0 = 1 \in [0,2]$. Si $0 \le u_n \le 2$, alors $6 \le u_n^2 + 6 \le 10$, donc $\dfrac{6}{5} \le u_{n+1} \le 2$. La propriété est héréditaire, donc vraie pour tout n.

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2 - 5u_n + 6}{5} = \dfrac{(u_n-2)(u_n-3)}{5}$. Comme $u_n \le 2$, on a $u_n - 2 \le 0$ et $u_n - 3 < 0$: le produit est positif ou nul, donc (u_n) est croissante.

3. La suite est croissante et majorée par 2 : elle converge vers un réel $\ell \in [1,2]$. La fonction f est continue sur $[0,2]$, intervalle stable qui contient ℓ, donc $f(\ell) = \ell$, soit $\ell^2 - 5\ell + 6 = 0$: $\ell = 2$ ou $\ell = 3$. Comme $\ell \le 2$, la limite vaut 2.

Exercice 4. Deux suites adjacentes

1. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$. Puis $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = -\dfrac{1}{n(n+1)^2} < 0$.

2. De plus $v_n - u_n = \dfrac{1}{n} \to 0$: les suites sont adjacentes.

3. Par le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ avec $u_n \le \ell \le v_n$. Pour $n = 4$: $u_4 = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{205}{144}$ et $v_4 = \dfrac{241}{144}$, soit $1{,}42 < \ell < 1{,}68$.

Exercice 5. Suite homographique à point fixe double

1. On calcule $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3u_n - 1 - u_n - 1}{u_n + 1} = \dfrac{2(u_n-1)}{u_n+1}$. Comme $u_0 = 2 > 1$, et si $u_n > 1$ alors $u_{n+1} - 1 > 0$, une récurrence donne $u_n > 1$ pour tout n ; en particulier la suite est bien définie.

2. $v_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{2(u_n-1)} = \dfrac{(u_n-1)+2}{2(u_n-1)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{u_n-1} = v_n + \dfrac{1}{2}$: (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$, avec $v_0 = 1$.

3. $v_n = 1 + \dfrac{n}{2} = \dfrac{n+2}{2}$, donc $u_n = 1 + \dfrac{1}{v_n} = 1 + \dfrac{2}{n+2}$, et $u_n \to 1$. Ici l'équation $f(x) = x$ s'écrit $(x-1)^2 = 0$: le point fixe est double, ce qui explique une convergence lente, en $\dfrac{1}{n}$ et non géométrique.

Exercice 6. Une suite définie par une équation

1. f_n est continue et strictement croissante sur $[0,1]$, avec $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = 1 > 0$: elle s'annule en un unique $u_n \in]0,1[$. On trouve $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $u_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2. Comme $u_n^n = 1 - u_n$: $f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + u_n - 1 = u_n^{n+1} - u_n^n = u_n^n(u_n - 1) < 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$. La fonction f_{n+1} étant strictement croissante, $u_n < u_{n+1}$.

3. (u_n) est croissante et majorée par 1 : elle converge vers $\ell \in]0,1]$. Si l'on avait $\ell < 1$, alors $0 < u_n^n \leq \ell^n \to 0$, donc $1 - u_n = u_n^n \to 0$ et $u_n \to 1$, ce qui contredit $\ell < 1$. Ainsi $\ell = 1$.

Questions fréquentes

Comment étudier une suite récurrente en 2 Bac SM ?

Chercher un intervalle stable, prouver que les termes y restent, établir la monotonie, puis appliquer un théorème de convergence. La continuité permet ensuite d'identifier la limite parmi les points fixes.

Comment montrer que deux suites sont adjacentes ?

Montrer que l'une est croissante, que l'autre est décroissante, puis que leur différence tend vers 0. Le théorème des suites adjacentes donne alors une limite commune comprise entre leurs termes.

Quelle est la limite de la suite géométrique q^n ?

Elle vaut 0 si $-1 < q < 1$, 1 si $q = 1$ et $+\infty$ si $q > 1$. Si $q \leq -1$, la suite n'a pas de limite.

Quelle différence entre suite bornée et suite convergente ?

Une suite convergente est bornée. Une suite bornée peut osciller indéfiniment, comme $((-1)^n)$; il faut une hypothèse supplémentaire, par exemple la monotonie.

À quoi servent les suites adjacentes ?

Elles prouvent l'existence d'une limite commune et en fournissent un encadrement à chaque rang. L'écart entre les deux termes mesure la largeur de cet encadrement.

MATHFJIB - Mathématiques 2 Bac SM A
Suivez les consignes et la progression de votre professeur.
Retrouver le cours, ses illustrations et les exercices corrigés en ligne.