COURS ILLUSTRÉ - LYCÉE - 2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES A - SEMESTRE 1

Théorème des Accroissements Finis (TAF)

Le théorème des accroissements finis, souvent abrégé TAF, relie une variation moyenne entre deux points à la dérivée en un point intermédiaire. Il permet de passer d'une information locale sur f' à une comparaison de $f(a)$ et $f(b)$. En 2 Bac SM A, on l'utilise pour prouver des inégalités, justifier la monotonie, compter les solutions d'une équation, encadrer une approximation et contrôler une suite récurrente. Ce cours part du théorème de Rolle, interprète chaque résultat géométriquement et se termine par six exercices corrigés.

Mathématiques 2ème Bac Sciences Mathématiques A BIOF - Programme marocain - Mis à jour le 18/11/2026

Objectifs du chapitre

- Vérifier les hypothèses de Rolle et du TAF et interpréter leurs conclusions
- Utiliser Rolle pour majorer le nombre de solutions d'une équation
- Encadrer un accroissement, une expression ou un réel grâce à l'inégalité des accroissements finis
- Contrôler la convergence d'une suite récurrente et l'erreur d'une approximation

Avant de commencer

- Continuité sur un segment et dérivabilité sur un intervalle ouvert
- Tangente, nombre dérivé et étude des variations
- Valeur absolue, inégalités et suites géométriques

1. Le théorème de Rolle

Rolle

Soient $a < b$. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Les deux extrémités de la courbe sont à la même hauteur. Une fonction continue ne peut pas monter puis redescendre sans atteindre un extremum intérieur, sauf si elle est constante ; dans les deux cas, la dérivée s'annule quelque part. Géométriquement, la courbe possède au moins une tangente horizontale entre a et b. Le résultat affirme une existence : il ne dit ni que c est unique, ni qu'il se situe au milieu du segment.

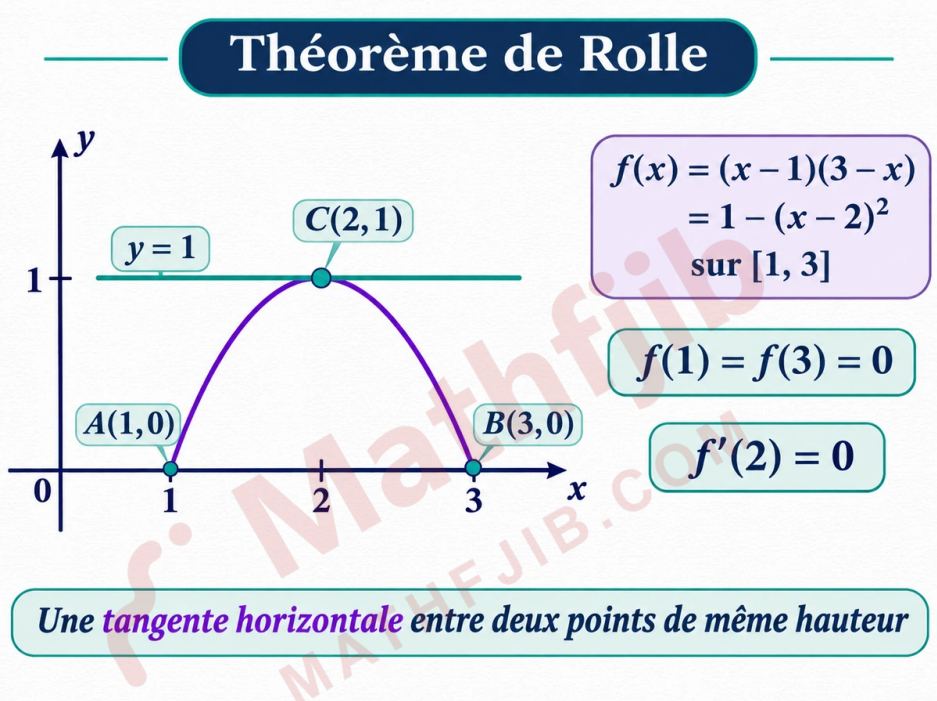
Identifier un point donné par Rolle

La fonction $f(x) = x^2 - 4x + 3$ est continue sur $[1, 3]$ et dérivable sur $]1, 3[$. Elle vérifie $f(1) = f(3) = 0$.

1. Rolle garantit un c intérieur avec $f'(c) = 0$. Ici $f'(x) = 2x - 4$ et l'on trouve $c = 2$. On calcule ce point après avoir justifié son existence.

Attention

La fonction $x \mapsto |x|$ prend la même valeur en -1 et en 1, mais n'est pas dérivable en 0. Sa dérivée vaut -1 ou 1 et ne s'annule nulle part sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$. L'hypothèse de dérivabilité sur tout l'intervalle ouvert ne peut pas être omise.



La fonction $f(x) = (x-1)(3-x)$ est nulle en 1 et 3 ; sa dérivée s'annule en 2 et la tangente y est horizontale.

Conséquence : les zéros de la dérivée

Si f est dérivable sur un intervalle I et s'annule en deux points $a < b$ de I, alors f' s'annule au moins une fois entre a et b. Par contraposée, si f' ne s'annule pas sur I, l'équation $f(x) = 0$ a au plus une solution dans I. Plus généralement, si f s'annule en n points distincts de I, f' s'annule en au moins $n-1$ points distincts.

Compter les solutions d'une équation

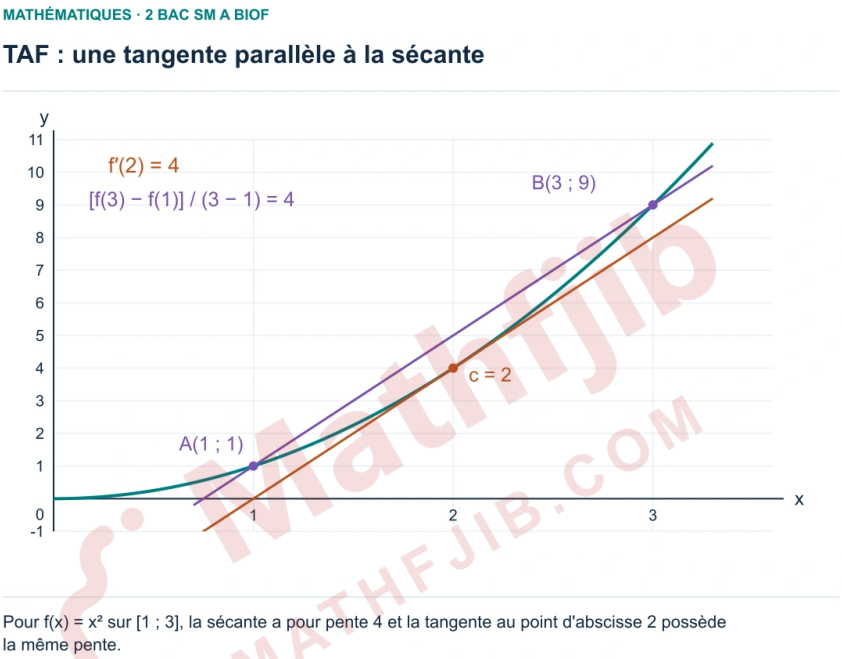
Montrons que $x^3 + 2x = \cos x$ a une unique solution réelle. Posons $f(x) = x^3 + 2x - \cos x$, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 3x^2 + 2 + \sin x \geq 3x^2 + 1 > 0$.

1. Si f s'annulait en deux réels, Rolle donnerait un zéro de f' : c'est impossible, donc il y a au plus une solution.
2. Comme $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 3 - \cos 1 > 0$, le TVI fournit une solution dans $]0, 1[$: l'équation a exactement une solution réelle.

2. Énoncer et interpréter le TAF

Théorème des accroissements finis

Si f est continue sur $[a, b]$, avec $a < b$, et dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, c'est-à-dire $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Pour $f(x) = x^2$ sur $[1, 3]$, la sécante a pour pente 4 et la tangente au point d'abscisse 2 possède la même pente.

Interprétation géométrique : le quotient $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est la pente de la sécante passant par $A\big(a, f(a)\big)$ et $B\big(b, f(b)\big)$. Le TAF affirme qu'une tangente à la courbe, en un point situé entre A et B, est parallèle à cette sécante. Il ne demande pas que f' soit continue : la continuité de f sur le segment et sa dérivabilité à l'intérieur suffisent. En cinématique, il dit qu'un mobile atteint à un instant sa vitesse moyenne.

Une pente moyenne réalisée localement

Pour $f(x) = x^2$ sur $[1, 3]$, la pente moyenne vaut $\dfrac{9 - 1}{3 - 1} = 4$.

1. Comme $f'(x) = 2x$, le point $c = 2$ donne bien $f'(c) = 4$. La tangente $y = 4x - 4$ est parallèle à la sécante $y = 4x - 3$: les droites sont parallèles, mais distinctes.

Remarque

On écrit souvent le TAF avec un paramètre : si f est dérivable sur un intervalle contenant a et $a + h$, avec $h \neq 0$, il existe $\theta \in \,]0, 1[$ tel que $f(a + h) = f(a) + h\, f'(a + \theta h)$. Le point $a + \theta h$ joue le rôle de c.

2.1 Pourquoi le TAF découle-t-il de Rolle ?

On retranche à f la fonction affine qui a la même pente que la sécante : $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Les hypothèses de continuité et de dérivabilité sont conservées, et $g(a) = g(b) = f(a)$. Rolle donne $g'(c) = 0$, donc $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Cette preuve explique le lien géométrique entre les deux théorèmes : Rolle est le cas d'une sécante horizontale.

3. L'inégalité des accroissements finis

Inégalité des accroissements finis

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in]a,b[$, alors $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$.

Le raisonnement tient en deux lignes : le TAF donne un c intérieur, puis on remplace $f'(c)$ par ses bornes. Comme $b-a>0$, le sens des inégalités est conservé. Géométriquement, la courbe reste comprise entre les deux droites passant par A de pentes m et M. Si les deux points ne sont pas dans l'ordre croissant, on les remet dans cet ordre ou on emploie la version avec valeur absolue.

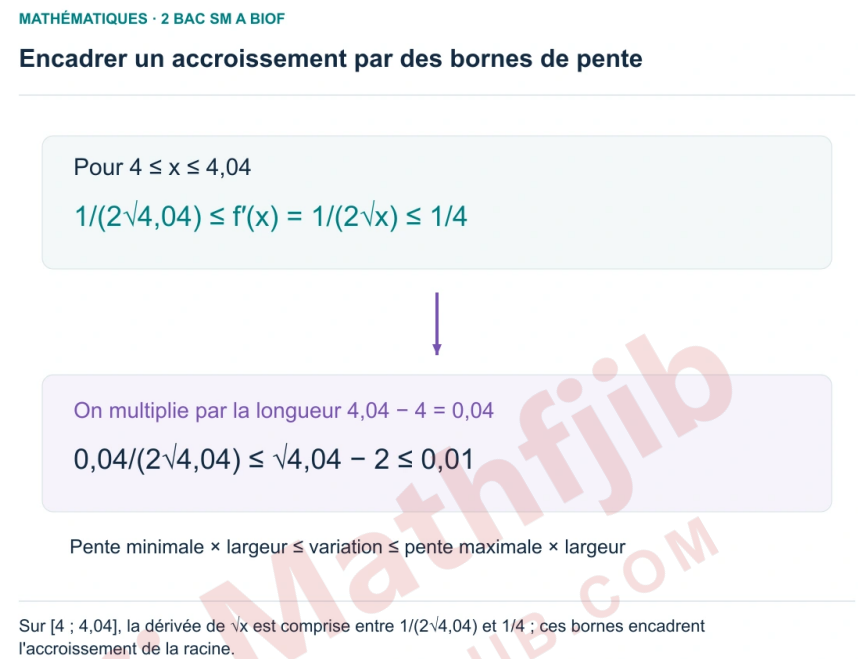
Version avec valeur absolue

Si $|f'(x)| \leq K$ pour tout x d'un intervalle I, alors, pour tous $a,b \in I$, $|f(b)-f(a)| \leq K|b-a|$. On dit que f est lipschitzienne de rapport K sur I.

Encadrer une différence de racines

Sur $[4\,;4{,}04]$, la dérivée de $\sqrt{x}$ vaut $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; elle est comprise entre $\dfrac{1}{2\sqrt{4{,}04}}$ et $\dfrac{1}{4}$.

1. Ainsi $\dfrac{0{,}04}{2\sqrt{4{,}04}} \leq \sqrt{4{,}04}-2 \leq 0{,}01$. On obtient une borne de la variation à partir des bornes de la pente ; la borne supérieure montre que $2{,}01$ majore la racine.



Sur $[4\,;4{,}04]$, la dérivée de $\sqrt{x}$ est comprise entre $\dfrac{1}{2\sqrt{4{,}04}}$ et $\dfrac{1}{4}$; ces bornes encadrent l'accroissement de la racine.

Deux inégalités classiques

Pour tous réels x,y : $|\sin x-\sin y| \leq |x-y|$, car la dérivée du sinus, cos, vérifie $|\cos t| \leq 1$.

1. De même, $|\arctan x-\arctan y| \leq |x-y|$, car $0<\dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$. En particulier, avec $y=0$: $|\sin x| \leq |x|$ et $|\arctan x| \leq |x|$ pour tout réel x.

4. Retrouver la monotonie et encadrer une expression

Pour prouver qu'une fonction est croissante, on choisit deux points quelconques $a < b$ d'un même intervalle. Si $f' \geq 0$, le TAF donne $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \geq 0$; si $f' > 0$, l'écart est strictement positif ; si la dérivée est nulle, les valeurs de la fonction sont toutes égales. Cette démonstration explique pourquoi la propriété caractéristique d'une fonction constante ou strictement croissante porte sur un intervalle et non sur un domaine coupé.

Comparer deux fonctions en dérivant leur différence

Pour $x \geq 0$, posons $h(x) = x - \arctan x$. On a $h(0) = 0$ et $h'(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2} \geq 0$.

1. La monotonie entraîne $h(x) \geq 0$, donc $\arctan x \leq x$. Pour $x > 0$, le TAF sur $[0, x]$ donne un point intermédiaire où h' est strictement positive : l'inégalité est stricte.

Encadrer une racine par le TAF

Soit $x > 0$ et $f(t) = \sqrt{1+t}$ sur $[0, x]$. Le TAF donne $c \in]0, x[$ tel que $\sqrt{1+x} - 1 = \dfrac{x}{2\sqrt{1+c}}$.

1. Comme $1 < \sqrt{1+c} < \sqrt{1+x}$, on obtient $1 + \dfrac{x}{2\sqrt{1+x}} < \sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2}$. Pour $x = 0{,}21$, cela donne $1{,}0954 < \sqrt{1{,}21} < 1{,}105$, cohérent avec $\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$.

5. Contrôler une suite récurrente par une contraction

Point fixe et contrôle de l'erreur

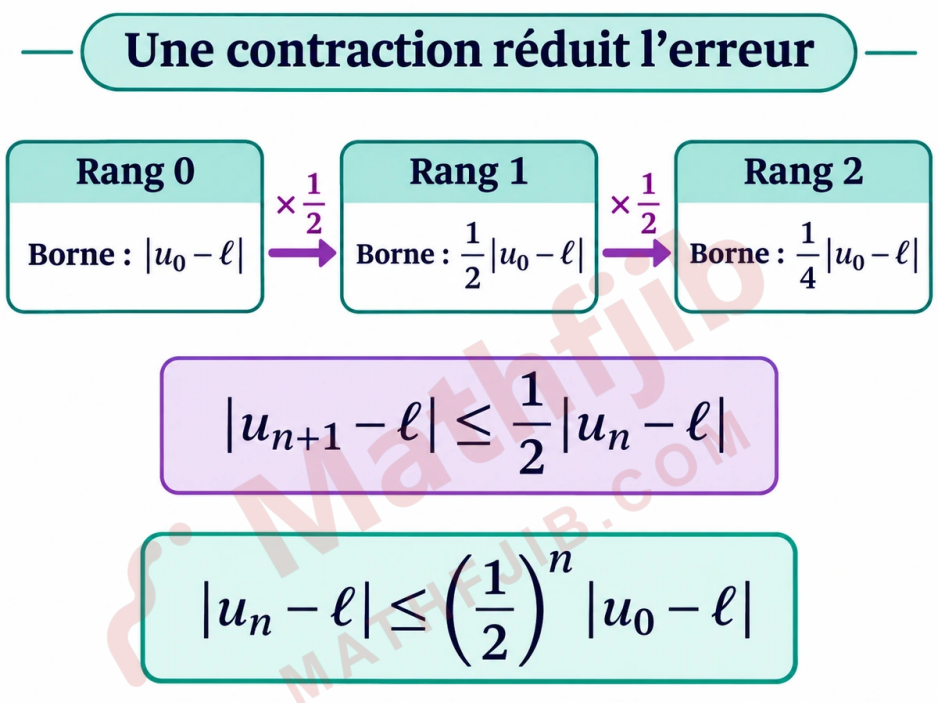
Si $g(I) \subset I$, si $\ell \in I$ vérifie $g(\ell) = \ell$ et si $|g'| \leq k < 1$ sur I, alors toute suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ vérifie $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$. Elle converge donc vers ℓ.

Une erreur divisée au moins par deux

Soit $g(x) = \sqrt{2+x}$ sur $I = [1, 2]$. On vérifie $g(I) = \left[\sqrt{3}, 2\right] \subset I$, $g(2) = 2$ et $|g'(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}} \leq \dfrac{1}{2}$.

1. Pour la suite $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $u_0 \in I$, l'inégalité des accroissements finis donne $|u_{n+1} - 2| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 2|$.
2. Par récurrence, $|u_n - 2| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$. Le terme de droite tend vers 0, donc $u_n \to 2$. Le raisonnement fournit aussi un majorant explicite de l'erreur.

Mathfjib MATHFJIB.COM



Si $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$, l'erreur est au plus divisée par deux à chaque étape et $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \ell|$.

Méthode : Étudier une suite récurrente avec l'inégalité des accroissements finis

1. Trouver un intervalle I stable par g et prouver par récurrence que tous les termes y restent.
2. Montrer que g admet un point fixe ℓ dans I, souvent par le TVI appliqué à $g(x) - x$.
3. Majorer $|g'|$ par un réel $k < 1$ sur I.
4. Écrire $|u_{n+1} - \ell| = |g(u_n) - g(\ell)| \leq k|u_n - \ell|$, puis $|u_n - \ell| \leq k^n|u_0 - \ell|$ par récurrence, et conclure.

6. Encadrer l'erreur d'une approximation affine

On peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à la différence entre une fonction et sa tangente. Pour $f(x) = \sqrt{x}$ près de 4, posons $r(x) = \sqrt{x} - 2 - \dfrac{x-4}{4}$. Alors $r(4) = 0$ et $r'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{2-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}$. Sur $[4\,;4{,}04]$, on a $\sqrt{x} \geq 2$ et $\sqrt{x} - 2 \leq 0{,}01$, donc $|r'(x)| \leq \dfrac{0{,}01}{8} = 0{,}00125$. D'où $|r(4{,}04)| \leq 0{,}00125 \times 0{,}04 = 0{,}00005$. Le nombre $2{,}01$ approche donc $\sqrt{4{,}04}$ avec une erreur au plus égale à 5×10^{-5}.

Méthode : Rédiger une application du TAF

1. Nommer la fonction et les deux bornes, dans l'ordre croissant.
2. Écrire la continuité sur le segment et la dérivabilité sur l'intervalle ouvert.
3. Donner l'égalité du TAF ou encadrer la dérivée sur tout l'intervalle utile.
4. Traduire le résultat dans l'inégalité demandée et conserver les valeurs absolues si l'ordre des points n'est pas fixé.

Je retiens

- Rolle exige en plus que les valeurs aux extrémités soient égales ; il fournit une tangente horizontale.
- Si f' ne s'annule pas sur un intervalle, l'équation $f(x) = 0$ y a au plus une solution.
- Le TAF fournit $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ pour au moins un $c \in]a, b[$: une tangente est parallèle à la sécante.
- Si $m \leq f' \leq M$ sur $]a, b[$, alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.
- Une borne $|g'| \leq k < 1$ sur un intervalle stable donne $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.
- Vérifier les hypothèses précède toujours l'application d'un théorème.

Mathfjib MATHFJIB.COM
Mathfjib MATHFJIB.COM

Exercices - À chercher avant la correction

Cherchez chaque exercice sur votre cahier avant de lire sa correction. Justifiez chaque étape et citez le théorème utilisé, avec ses hypothèses.

Exercice 1. Rolle : hypothèses et conclusion

Facile

1. Vérifier que $f(x) = x^3 - 4x$ satisfait les hypothèses de Rolle sur $[-2, 2]$ et trouver tous les réels c annoncés par le théorème.
2. Pour $h(x) = x^2$ sur $[0, 1]$, h' s'annule-t-elle sur $]0, 1[$? Quelle hypothèse de Rolle manque ?
3. Même question pour $k(x) = 1 - |x|$ sur $[-1, 1]$.

Exercice 2. Le TAF pour la racine carrée

Facile

1. Appliquer le TAF à $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[1, 4]$ et déterminer le réel c obtenu.
2. Montrer que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \dfrac{1}{2}|x - y|$ pour tous $x, y \geq 1$.
3. En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[4, 5]$, encadrer $\sqrt{5}$.

Exercice 3. Encadrer l'arctangente

Intermédiaire

1. À l'aide du TAF, montrer que pour tout $x > 0$: $\dfrac{x}{1 + x^2} < \arctan x < x$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan x}{x}$.
3. Donner un encadrement de $\arctan \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4. Une unique solution grâce à Rolle

Intermédiaire

1. Montrer que l'équation $x^5 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $]0, 1[$.
2. À l'aide du théorème de Rolle, montrer qu'elle n'en admet pas d'autre dans $\mathbb{R}$.
3. Généraliser : si $p > 0$ et $q \in \mathbb{R}$, combien de solutions réelles l'équation $x^3 + px + q = 0$ possède-t-elle ?

Exercice 5. Suite récurrente et vitesse de convergence

Approfondissement

Soit $g(x) = \dfrac{1}{1 + x}$, $I = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Montrer que $g(I) \subset I$ et que $u_n \in I$ pour tout n.
2. Montrer que g admet dans I un unique point fixe α, à calculer.
3. Montrer que $|g'(x)| \leq \dfrac{4}{9}$ sur I, puis que $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.

4. En déduire la limite de (u_n) et un rang à partir duquel u_n approche α à 10^{-2} près.

Exercice 6. Encadrer une somme par le TAF

Approfondissement

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$: $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$.
2. En déduire que $2\sqrt{n+1} - 2 < S_n < 2\sqrt{n} - 1$ pour tout $n \geq 2$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$.

Mathfjib MATHFJIB.COM
Mathfjib MATHFJIB.COM

Corrections expliquées des exercices

Exercice 1. Rolle : hypothèses et conclusion

1. f est un polynôme, donc continue sur $[-2,2]$ et dérivable sur $]-2,2[$, et $f(-2)=f(2)=0$. On résout $f'(c)=3c^2-4=0$: $c=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ou $c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, et les deux appartiennent à $]-2,2[$. Rolle garantit au moins un tel réel ; ici il y en a deux.

2. $h'(x)=2x>0$ sur $]0,1[$: la dérivée ne s'annule pas. L'hypothèse manquante est $h(0)=h(1)$, puisque $h(0)=0$ et $h(1)=1$.

3. $k(-1)=k(1)=0$ et k est continue, mais elle n'est pas dérivable en 0 : sur $]-1,0[$, $k'=1$ et sur $]0,1[$, $k'=-1$. La dérivée ne s'annule pas ; c'est la dérivabilité sur $]-1,1[$ qui manque.

Exercice 2. Le TAF pour la racine carrée

1. f est continue sur $[1,4]$ et dérivable sur $]1,4[$. Le TAF donne $c\in]1,4[$ tel que $\dfrac{1}{2\sqrt{c}}=\dfrac{2-1}{4-1}=\dfrac{1}{3}$, donc $\sqrt{c}=\dfrac{3}{2}$ et $c=\dfrac{9}{4}$, qui appartient bien à $]1,4[$.

2. Sur $[1,+\infty[$, $|f'(t)|=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\le\dfrac{1}{2}$. La version avec valeur absolue donne $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le\dfrac{1}{2}|x-y|$.

3. Sur $]4,5[$, $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\le f'(t)\le\dfrac{1}{4}$ et $\sqrt{5}<3$, donc $\dfrac{1}{6}<f'(t)\le\dfrac{1}{4}$. Ainsi $\dfrac{1}{6}\le\sqrt{5}-2\le\dfrac{1}{4}$, soit $2{,}16\le\sqrt{5}\le 2{,}25$.

Exercice 3. Encadrer l'arctangente

1. Soit $x>0$. La fonction arctan est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$. Le TAF donne $c\in]0,x[$ tel que $\arctan x-\arctan 0=\dfrac{x}{1+c^2}$. Comme $0<c<x$, on a $1<1+c^2<1+x^2$, donc $\dfrac{x}{1+x^2}<\dfrac{x}{1+c^2}<x$, ce qui donne l'encadrement.

2. En divisant par $x>0$: $\dfrac{1}{1+x^2}<\dfrac{\arctan x}{x}<1$. La borne de gauche tend vers 1 quand $x\to 0^+$: par encadrement, la limite vaut 1.

3. Avec $x=\dfrac{1}{2}$: $\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{2}{5}$, donc $0{,}4<\arctan\dfrac{1}{2}<0{,}5$.

Exercice 4. Une unique solution grâce à Rolle

1. $f(x)=x^5+x-1$ est continue, $f(0)=-1<0$ et $f(1)=1>0$: le TVI donne une solution dans $]0,1[$.

2. Si f s'annulait en deux réels $a<b$, Rolle donnerait $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$. Or $f'(x)=5x^4+1>0$ pour tout réel x : c'est impossible. La solution est donc unique.

3. Pour $P(x)=x^3+px+q$, $P'(x)=3x^2+p>0$: par le même argument, P a au plus un zéro. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$, P prend des valeurs de signes opposés et le TVI donne un zéro. L'équation a exactement une solution réelle.

Exercice 5. Suite récurrente et vitesse de convergence

1. g est décroissante sur I, donc $g(I)=\left[g(1),g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right]\subset I$. Comme $u_0=1\in I$, une récurrence immédiate donne $u_n\in I$ pour tout n.

2. $g(x)=x\iff x^2+x-1=0$, dont les racines sont $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Seule $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}618$ appartient à I.

3. $g'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ et, pour $x \geq \dfrac{1}{2}$, $(1+x)^2 \geq \dfrac{9}{4}$, donc $|g'(x)| \leq \dfrac{4}{9}$. L'inégalité des accroissements finis donne $|u_{n+1} - \alpha| = |g(u_n) - g(\alpha)| \leq \dfrac{4}{9}|u_n - \alpha|$, puis par récurrence $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$, car u_0 et α sont dans I, de longueur $\dfrac{1}{2}$.

4. Comme $0 < \dfrac{4}{9} < 1$, $\left(\dfrac{4}{9}\right)^n \to 0$ et $u_n \to \alpha$. Pour $n = 5$, $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{9}\right)^5 \approx 0{,}0087 < 10^{-2}$: $u_5 = \dfrac{8}{13} \approx 0{,}6154$ approche α à 10^{-2} près, et c'est le cas de tous les termes suivants.

Exercice 6. Encadrer une somme par le TAF

1. Le TAF appliqué à $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[k, k+1]$ donne $c \in]k, k+1[$ tel que $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \dfrac{1}{2\sqrt{c}}$. Comme $\sqrt{k} < \sqrt{c} < \sqrt{k+1}$, on obtient l'encadrement.

2. L'inégalité de droite donne $\dfrac{1}{\sqrt{k}} > 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$. En sommant pour k de 1 à n, la somme se télescope : $S_n > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$. L'inégalité de gauche donne $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$; en sommant pour k de 1 à $n-1$: $S_n - 1 < 2\left(\sqrt{n} - 1\right)$, soit $S_n < 2\sqrt{n} - 1$.

3. La minoration donne $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. En divisant par $\sqrt{n}$: $2\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}} < \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} < 2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Les deux bornes tendent vers 2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = 2$.

Questions fréquentes

Quelle est la différence entre Rolle et le TAF ?

Rolle suppose que les valeurs aux extrémités sont égales et fournit une dérivée nulle à l'intérieur. Le TAF n'exige pas cette égalité et fournit une dérivée égale à la pente moyenne entre les deux extrémités.

Comment utiliser le théorème des accroissements finis pour démontrer une inégalité ?

Choisir une fonction et un segment, vérifier continuité et dérivabilité, écrire $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, puis encadrer $f'(c)$ en utilisant seulement le fait que c est entre a et b.

Comment montrer avec Rolle qu'une équation a au plus une solution ?

Raisonner par l'absurde : deux solutions distinctes donneraient, par Rolle, un zéro de la dérivée entre elles. Si la dérivée ne s'annule jamais sur l'intervalle, il y a au plus une solution.

Faut-il calculer le point c du TAF ?

Pas toujours. Pour démontrer une inégalité, il suffit généralement de savoir que ce point appartient à l'intervalle où la dérivée a été encadrée.

Quand peut-on utiliser une contraction pour une suite ?

Il faut un intervalle stable par la fonction, un point fixe dans cet intervalle et une borne de la dérivée, en valeur absolue, strictement inférieure à 1 sur l'intervalle.