COURS ILLUSTRÉ - LYCÉE - 2ÈME BAC SCIENCES MATHÉMATIQUES A - SEMESTRE 2

Fonctions primitives et calcul intégral

Chercher une primitive revient à retrouver une fonction à partir de sa dérivée. Calculer une intégrale sur un segment donne un nombre qui mesure une accumulation et, pour une fonction positive, une aire. Ce cours de fonctions primitives et calcul intégral de 2 Bac SM A relie ces deux idées, puis développe les techniques de calcul (primitives usuelles, intégration par parties, changement de variable), les encadrements, les fonctions définies par une intégrale, les sommes de Riemann, les aires et les volumes de révolution. Six exercices corrigés terminent le chapitre.

Mathématiques 2ème Bac Sciences Mathématiques A BIOF - Programme marocain - Mis à jour le 18/11/2026

Objectifs du chapitre

- Reconnaître une primitive et utiliser une condition pour fixer la constante
- Calculer une intégrale par primitive, par parties ou par changement de variable
- Encadrer une intégrale, utiliser la valeur moyenne et dériver une fonction définie par une intégrale
- Relier intégrales, sommes de Riemann, aires entre deux courbes et volumes de révolution

Avant de commencer

- Dérivées usuelles et dérivation des composées
- Logarithme, exponentielle, arctangente et trigonométrie
- Continuité, suites, sommes finies et méthode des rectangles

1. Primitives : une famille de fonctions

Primitive sur un intervalle

Une primitive de f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$. Si F est une primitive, toutes les autres sont les fonctions $F + C$, où C est une constante réelle. Pour $x_0 \in I$ et y_0 réel, une seule primitive vérifie $F(x_0) = y_0$.

Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives ; le calcul intégral en fournira une construction. Deux primitives d'une même fonction ont une différence de dérivée nulle, donc constante sur l'intervalle. Sur un domaine coupé, comme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, les constantes peuvent être différentes sur les deux intervalles : l'écriture d'une primitive doit donc annoncer son intervalle.

Fonction	Une primitive	Intervalle ou condition
x^r	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$	$x>0$, $r\neq -1$; tout réel x si $r\in\mathbb{N}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	Un intervalle ne contenant pas 0
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$x>0$
e^{ax+b}	$\dfrac{1}{a}e^{ax+b}$	$a\neq 0$
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$	$a\neq 0$
$\sin(ax+b)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$	$a\neq 0$
$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	Un intervalle où $\cos x\neq 0$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

Fixer la constante avec une valeur

Pour $f(x)=3x^2-2$ sur $\mathbb{R}$, les primitives sont $F(x)=x^3-2x+C$.

1. La condition $F(1)=4$ donne $-1+C=4$, donc $C=5$: la primitive cherchée est x^3-2x+5.

2. Reconnaître une dérivée composée à l'envers

Formes composées usuelles

Sur un intervalle où les expressions sont définies : une primitive de $u'u^r$ est $\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$ si $r\neq -1$ (avec $u>0$ si r n'est pas entier) ; de $\dfrac{u'}{u}$, c'est $\ln\lvert u\rvert$; de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, c'est $2\sqrt{u}$; de $u'e^u$, c'est e^u ; de $u'\cos u$, c'est $\sin u$; de $\dfrac{u'}{1+u^2}$, c'est $\arctan u$.

Ajuster le coefficient

Pour intégrer $\dfrac{x}{x^2+4}$, on remarque que la dérivée du dénominateur est $2x$: $\dfrac{x}{x^2+4}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{x^2+4}$. Une primitive est donc $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4)$ sur $\mathbb{R}$.

1. De même, une primitive de $\dfrac{1}{x^2+4}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$ est $\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x}{2}$, puisque la dérivée de $\dfrac{x}{2}$ vaut $\dfrac{1}{2}$.

3. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Intégrale définie

Si f est continue sur un intervalle I contenant a et b, et si F est une de ses primitives, on définit $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=\big[F(x)\big]_a^b$. Le résultat ne dépend pas du choix de la primitive. C'est un nombre, tandis que F est une fonction.

Bornes et variable muette

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$ et $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$. La lettre sous le signe intégral est une variable muette : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

Un calcul direct

$\int_0^2 (3x^2+1)\,dx = \left[x^3+x\right]_0^2 = 10$.

1. Une constante ajoutée à la primitive se soustrairait à elle-même : on n'écrit pas de « $+C$ » dans le résultat d'une intégrale définie.

Linéarité et relation de Chasles

Pour des fonctions continues et des réels α, β : $\int_a^b (\alpha f+\beta g) = \alpha\int_a^b f + \beta\int_a^b g$. Si f est continue sur un intervalle contenant a, b et c : $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Interprétation géométrique

Dans un repère orthogonal, si f est continue et positive sur $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Si f est négative, l'intégrale est l'opposé de cette aire.

Intégrale signée et aire

$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = 0$: les parties au-dessus et au-dessous de l'axe se compensent.

1. L'aire du domaine compris entre la courbe et l'axe vaut pourtant $\int_0^{\pi} \sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = 2+2 = 4$ unités d'aire.

3.1 Parité et périodicité

Simplifier grâce aux symétries

Si f est continue sur $[-a,a]$ et paire, $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$; si elle est impaire, $\int_{-a}^a f = 0$. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique, $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$ pour tout réel a.

Une intégrale nulle sans calcul

La fonction $x \mapsto x^3\cos x$ est continue et impaire sur $[-1,1]$.

1. Donc $\int_{-1}^1 x^3\cos x\,dx = 0$, sans chercher de primitive.

4. Intégration par parties

Formule d'intégration par parties

Si u et v sont dérivables sur $[a,b]$ et si u' et v' y sont continues, alors $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$. La formule provient de $(uv)' = u'v + uv'$.

Dériver le facteur qui se simplifie

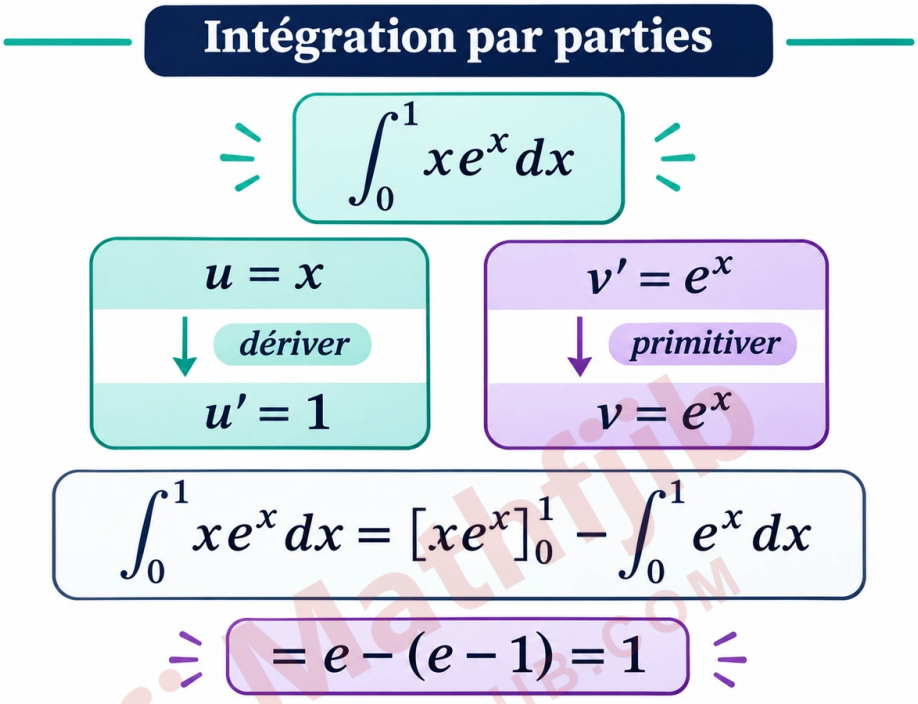
Pour $I = \int_0^1 xe^x\,dx$, on choisit $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$.

1. Alors $I = \big[xe^x\big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - (e-1) = 1$. Le facteur polynôme a perdu un degré.

Faire apparaître le facteur 1

Pour $\int_1^e \ln x\,dx$, on écrit $\ln x \times 1$ et l'on prend $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$.

1. On obtient $\big[x\ln x\big]_1^e - \int_1^e 1\,dx = e - (e-1) = 1$. Une primitive de $\ln x$ sur $]0,+\infty[$ est donc $x\ln x - x$.



Pour intégrer xe^x entre 0 et 1, choisir $u = x$ et $v' = e^x$ donne $\big[xe^x\big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = 1$.

5. Changement de variable : transformer aussi les bornes

Changement de variable

Si φ est dérivable sur $[\alpha,\beta]$, avec φ' continue, et si f est continue sur un intervalle contenant $\varphi([\alpha,\beta])$, alors $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$. La formule conserve l'orientation des bornes, même si φ est décroissante.

Substituer une expression complète

Dans $I = \int_0^1 2xe^{x^2}\,dx$, on pose $u = x^2$, donc $du = 2x\,dx$; les nouvelles bornes sont 0 et 1.

1. Ainsi $I = \int_0^1 e^u\,du = e - 1$. Le changement porte sur l'expression, sur le différentiel et sur les bornes : on ne mélange pas les deux variables dans une même intégrale.

L'aire d'un quart de disque

Calculons $J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ en posant $x = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $dx = \cos t\,dt$, et $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ car $\cos t \geq 0$ sur cet intervalle.

1. Donc $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.
2. On retrouve l'aire d'un quart du disque de rayon 1. La linéarisation de $\cos^2 t$ a été indispensable pour trouver une primitive.

6. Intégrale, ordre et encadrement

Positivité et comparaison

Pour $a \leq b$: si $f \geq 0$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f \geq 0$; si $f \leq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. En particulier, si $m \leq f \leq M$ sur $[a,b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

Intégrale et valeur absolue

Pour f continue sur $[a,b]$ avec $a \leq b$: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$. Si f change de signe, des contributions positives et négatives peuvent se compenser dans l'intégrale.

Une borne sans primitive explicite

Sur $[0,1]$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, donc $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \leq 1$.

1. Comme l'intégrale vaut $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, cet encadrement est cohérent. La méthode reste utile lorsqu'on ne connaît aucune primitive simple.

Intégrer une inégalité

Pour $t \geq 0$, $\frac{1}{1+t} \leq 1$. En intégrant sur $[0,x]$ avec $x \geq 0$: $\ln(1+x) \leq x$.

1. En intégrant de même $1 - t \leq \frac{1}{1+t}$, qui équivaut à $1 - t^2 \leq 1$, on obtient $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$ pour $x \geq 0$.

6.1 Valeur moyenne et théorème de la moyenne

Valeur moyenne sur un segment

Pour $a < b$, la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Si f est continue, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \mu$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$: c'est le théorème de la moyenne.

La moyenne est comprise entre le minimum et le maximum de f sur le segment, et le TVI garantit qu'elle est atteinte. Pour $f(x) = x^2$ sur $[0, 1]$, elle vaut $\dfrac{1}{3}$, atteinte en $c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; ce n'est pas la valeur de f au milieu du segment. Géométriquement, l'aire sous la courbe est celle d'un rectangle de base $b - a$ et de hauteur μ.

7. Fonctions définies par une intégrale

Théorème fondamental

Si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a : $F'(x) = f(x)$. Si u est dérivable et prend ses valeurs dans I, alors $\left(\displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\,dt\right)' = u'(x)f\big(u(x)\big)$.

Une borne supérieure variable

Pour $G(x) = \displaystyle\int_1^{x^2+1} \frac{dt}{1+t^2}$, la fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}$ et la borne est dérivable.

1. Donc $G'(x) = \dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2}$, sans calculer d'abord une expression explicite de G.

Si les deux bornes varient, la relation de Chasles donne $\left(\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right)' = v'(x)f\big(v(x)\big) - u'(x)f\big(u(x)\big)$. Pour étudier une telle fonction, on combine cette dérivée avec des encadrements de l'intégrale, qui donnent ses limites.

Remarque

Ces formules concernent une fonction intégrée qui ne dépend que de la variable muette t. Les fonctions de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(x, t)\,dt$ sont hors programme.

8. Sommes de Riemann et méthode des rectangles

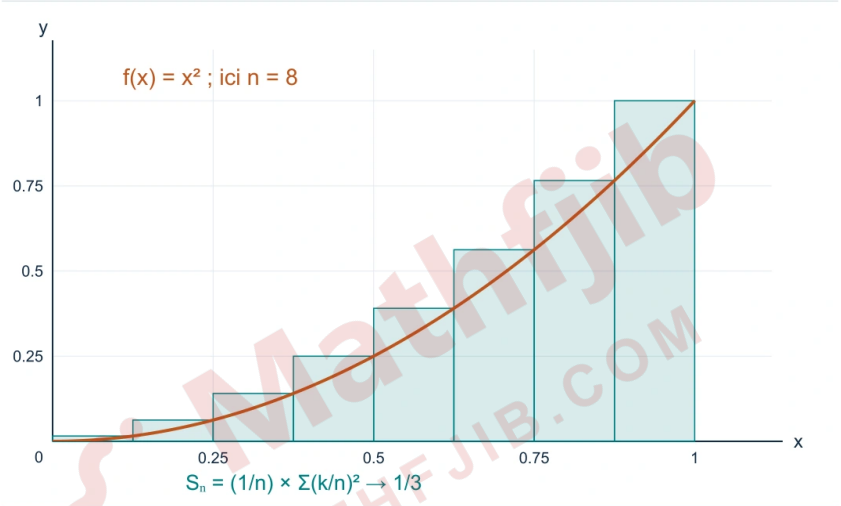
Limite des sommes de Riemann

Si f est continue sur $[a, b]$, les suites $u_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ et $v_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Si f est croissante sur $[a, b]$, les rectangles de gauche sont sous la courbe et ceux de droite la recouvrent : $v_n \leq \displaystyle\int_a^b f \leq u_n$, et l'écart vaut exactement $u_n - v_n = \dfrac{(b-a)\big(f(b)-f(a)\big)}{n}$. Ces deux suites encadrent donc l'intégrale avec une précision connue ; pour une fonction décroissante, les rôles sont échangés.

MATHÉMATIQUES · 2 BAC SM A BIOF

Sommes de Riemann : des rectangles vers une aire



Sur [0 ; 1], la somme des rectangles à droite de hauteur (k/n)² et de largeur 1/n converge vers l'intégrale de x², égale à 1/3.

Sur $[0,1]$, la somme des rectangles à droite de hauteur $\left(\frac{k}{n}\right)^2$ et de largeur $\frac{1}{n}$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

Reconnaître le pas et l'abscisse

La somme $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$ est une somme de Riemann de $f(x) = x^2$ sur $[0,1]$.

1. Sa limite est $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Le facteur $\dfrac{1}{n}$ est la largeur des rectangles ; sans lui, on n'aurait pas la même limite.

Une limite qui fait apparaître $\ln 2$

Pour $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$, on factorise n : $w_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

1. C'est une somme de Riemann de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $[0,1]$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$.

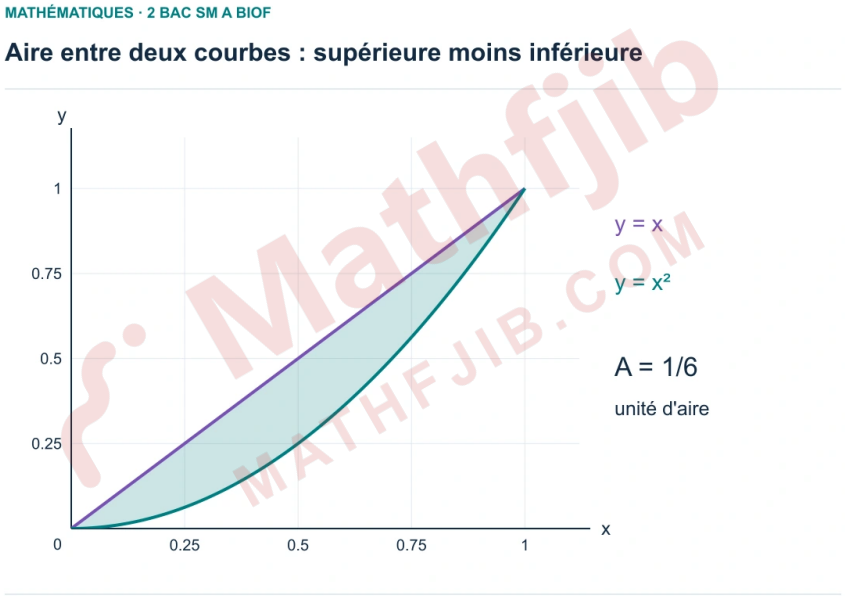
9. Aires entre deux courbes et volumes de révolution

Aire entre deux courbes

Dans un repère orthogonal, l'aire du domaine limité par les courbes de f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, avec $a < b$, vaut $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$ unités d'aire. Si $f \geq g$ sur $[a,b]$, on retire la valeur absolue ; sinon on coupe l'intégrale aux points d'intersection. L'unité d'aire est l'aire du rectangle construit sur les vecteurs unitaires du repère.

Courbe supérieure moins courbe inférieure

Sur $[0,1]$, $x \geq x^2$. L'aire entre ces courbes vaut $\displaystyle\int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ unité d'aire.



Sur [0 ; 1], la courbe y = x est au-dessus de y = x² : l'aire entre elles vaut l'intégrale de x − x², soit 1/6.

Sur $[0,1]$, la droite $y = x$ est au-dessus de la courbe $y = x^2$: l'aire entre elles vaut $\displaystyle\int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{6}$.

Des courbes qui se croisent

Les courbes de $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x$ se coupent en -1, 0 et 1. Sur $[-1,0]$, $x^3 \geq x$; sur $[0,1]$, $x \geq x^3$.

1. L'aire comprise entre elles sur $[-1,1]$ vaut $\displaystyle\int_{-1}^0 (x^3 - x)\,dx + \int_0^1 (x - x^3)\,dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ unité d'aire. Sans découpage, on aurait obtenu 0.

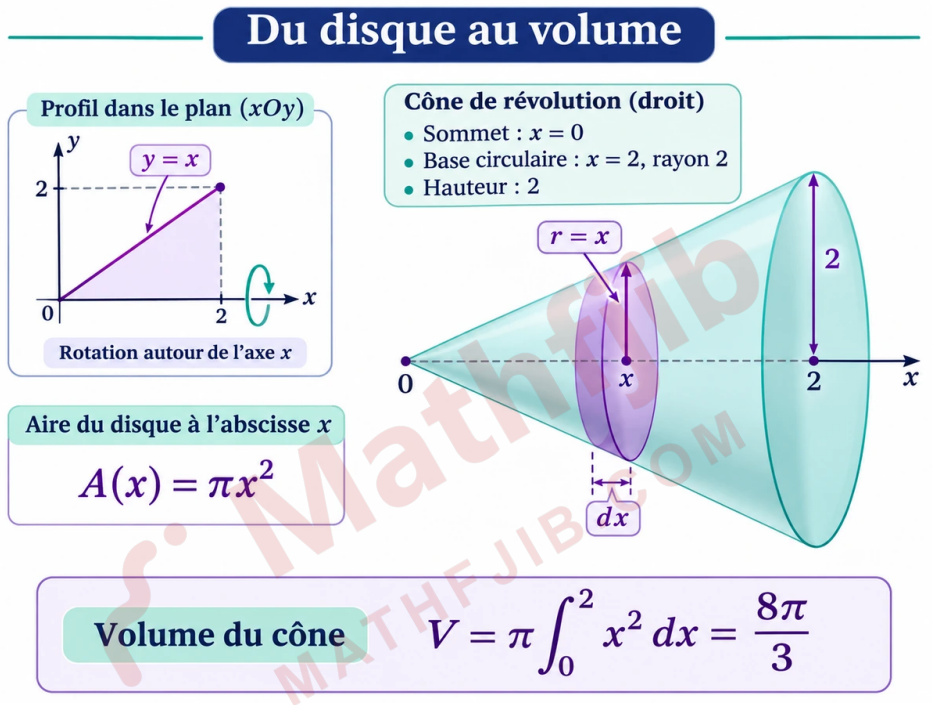
Volume d'un solide de révolution

Dans un repère orthonormé, la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine limité par la courbe d'une fonction continue f, cet axe et les droites $x = a$ et $x = b$ engendre un solide de volume $V = \pi \displaystyle\int_a^b f(x)^2\,dx$ unités de volume : chaque section est un disque de rayon $|f(x)|$. Autour de l'axe des ordonnées, si la courbe s'écrit $x = g(y)$ pour $c \leq y \leq d$, le volume vaut $\pi \displaystyle\int_c^d g(y)^2\,dy$.

Un cône retrouvé par intégration

La rotation de $y = x$, pour $0 \leq x \leq 2$, autour de l'axe des abscisses engendre un cône de hauteur 2 et de rayon 2.

1. Son volume vaut $\pi \displaystyle\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8\pi}{3}$, en accord avec la formule $\dfrac{\pi r^2 h}{3}$.



La rotation de la droite $y = x$, de 0 à 2, autour de l'axe des abscisses engendre un cône de volume $\pi \displaystyle\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8\pi}{3}$.

Un volume autour de l'axe des ordonnées

La rotation de l'arc $y = x^2$, avec $x \geq 0$ et $0 \leq y \leq h$, autour de l'axe des ordonnées engendre une coupe parabolique. Le rayon à la hauteur y vaut $x = \sqrt{y}$.

1. Son volume vaut $\pi \displaystyle\int_0^h (\sqrt{y})^2\,dy = \pi \int_0^h y\,dy = \frac{\pi h^2}{2}$ unités de volume.

10. Suites d'intégrales : comparer avant de calculer

Une convergence par encadrement

Pour $n \geq 0$, posons $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$. Sur $[0,1]$, $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$, donc $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$: la suite est décroissante et positive.

1. De plus $0 \leq I_n \leq \displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$, donc $I_n \to 0$. Enfin $I_n + I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\,dx = \frac{1}{n+1}$: on obtient une relation de récurrence sans chercher une primitive différente à chaque rang.

Attention

Une aire est positive, une intégrale peut être négative. Une primitive est une fonction, une intégrale définie est un nombre. Ces distinctions permettent de vérifier rapidement la cohérence d'un résultat.

Je retiens

- Si $F' = f$ sur un intervalle, alors $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$; deux primitives y diffèrent d'une constante.
- Pour $f \geq 0$, $\displaystyle\int_a^b f$ est l'aire sous la courbe ; pour f impaire, $\displaystyle\int_{-a}^a f = 0$.

- Les parties proviennent de la dérivée d'un produit ; le changement de variable de celle d'une composée, bornes comprises.
- Si $m \leq f \leq M$ sur $[a, b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$; la valeur moyenne est atteinte.
- $\left(\int_a^{u(x)} f(t)\,dt\right)' = u'(x)f\big(u(x)\big)$.
- Les sommes de Riemann $\dfrac{b-a}{n}\sum f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$ tendent vers $\int_a^b f$.
- Aire : $\int_a^b |f-g|$; volume autour de l'axe des abscisses : $\pi\int_a^b f^2$.

Mathfjib MATHFJIB.COM
Mathfjib MATHFJIB.COM

Exercices - À chercher avant la correction

Cherchez chaque exercice sur votre cahier avant de lire sa correction. Justifiez chaque étape et citez le théorème utilisé, avec ses hypothèses.

Exercice 1. Calculs avec des primitives usuelles

Facile

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

Exercice 2. Intégration par parties

Facile

Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

1. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$
2. $J = \displaystyle\int_1^{e} x\ln x\,dx$

Exercice 3. Changements de variable

Intermédiaire

1. En posant $t=\sqrt{x}$, calculer $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.
2. En posant $u=\cos x$, calculer $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x\,dx$.

Exercice 4. Aire et volume de révolution

Intermédiaire

1. Calculer l'aire du domaine limité par les courbes de $x\mapsto\sqrt{x}$ et $x\mapsto x^2$ entre $x=0$ et $x=1$.
2. Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe de $x\mapsto\sqrt{x}$, pour $0\le x\le 4$.
3. Calculer la valeur moyenne de $x\mapsto\sqrt{x}$ sur $[0,4]$ et déterminer où elle est atteinte.

Mathfjib MATHFJIB.COM

Exercice 5. Étude d'une fonction définie par une intégrale

Approfondissement

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$.

1. Justifier que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$. En déduire le sens de variation de F.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $e^{-2x} \ln 2 \leq F(x) \leq e^{-x} \ln 2$.
3. En déduire les limites de F en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 6. Limites de sommes de Riemann

Approfondissement

Déterminer la limite de chaque suite en reconnaissant une somme de Riemann.

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$
2. $v_n = \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
3. $w_n = \displaystyle\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k e^{\frac{k}{n}}$

Mathfjib MATHFJIB.COM
Mathfjib MATHFJIB.COM

Corrections expliquées des exercices

Exercice 1. Calculs avec des primitives usuelles

1. Avec $u = 2x+1$ et $u' = 2$: $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3\,dx = \left[\frac{(2x+1)^4}{8}\right]_0^1 = \frac{81-1}{8} = 10.$

2. $\dfrac{\ln x}{x} = u'u$ avec $u = \ln x$: $\left[\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \dfrac{1}{2}.$

3. $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{x^2+1}$: $\left[\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \dfrac{\ln 2}{2}.$

4. $\tan x = -\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}$ avec $\cos x > 0$: $\left[-\ln(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\ln 2}{2}.$

Exercice 2. Intégration par parties

1. Avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos x$: $u'(x) = 1$ et $v(x) = \sin x$. Donc $I = \left[x\sin x\right]_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx = 0 - \left[-\cos x\right]_0^\pi = -2.$

2. Avec $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$: $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$. Donc $J = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e \frac{x}{2}\,dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$

Exercice 3. Changements de variable

1. Pour $x \in [1,4]$, $t = \sqrt{x} \in [1,2]$, $x = t^2$ et $dx = 2t\,dt$. Donc $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{2t\,dt}{t^2+t} = \int_1^2 \frac{2}{t+1}\,dt = \left[2\ln(t+1)\right]_1^2 = 2\ln\frac{3}{2}.$

2. $du = -\sin x\,dx$; quand x va de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$, u va de 1 à 0. Donc $J = \displaystyle\int_1^0 -u^2\,du = \int_0^1 u^2\,du = \frac{1}{3}.$

Exercice 4. Aire et volume de révolution

1. Sur $[0,1]$, $\sqrt{x} \geq x^2$. L'aire vaut $\displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^2\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ unité d'aire.

2. $V = \pi\displaystyle\int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int_0^4 x\,dx = 8\pi$ unités de volume.

3. $\mu = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times 4^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$. L'équation $\sqrt{c} = \dfrac{4}{3}$ donne $c = \dfrac{16}{9}$, qui appartient bien à $[0,4]$.

Exercice 5. Étude d'une fonction définie par une intégrale

1. La fonction $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$; avec une primitive G de f, $F(x) = G(2x) - G(x)$ est dérivable et $F'(x) = 2f(2x) - f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x} - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$. Comme $e^{-2x} < e^{-x}$ pour $x > 0$, $F'(x) < 0$: F est strictement décroissante.

2. Pour $t \in [x,2x]$, $e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$, donc $\dfrac{e^{-2x}}{t} \leq \dfrac{e^{-t}}{t} \leq \dfrac{e^{-x}}{t}$. En intégrant sur $[x,2x]$ et avec $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{dt}{t} = \ln(2x) - \ln x = \ln 2$, on obtient l'encadrement.

3. Quand $x \to 0^+$, les deux bornes tendent vers $\ln 2$: $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \ln 2$. Quand $x \to +\infty$, la borne supérieure tend vers 0 et $F(x) > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Exercice 6. Limites de sommes de Riemann

1. $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$: somme de Riemann de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[0,1]$. Donc $u_n \to \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$.

2. $v_n = \dfrac{1}{\pi} \times \dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(0 + k\frac{\pi}{n}\right)$: somme de Riemann de sin sur $[0,\pi]$, multipliée par $\dfrac{1}{\pi}$. Donc $v_n \to \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{2}{\pi}$.

3. $w_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} e^{\frac{k}{n}}$: somme de Riemann de $x \mapsto xe^x$ sur $[0,1]$. Donc $w_n \to \displaystyle\int_0^1 xe^x\, dx = 1$, calculée par parties dans le cours.

Questions fréquentes

Quand choisir l'intégration par parties ?

Elle convient souvent à un produit dont un facteur devient plus simple en dérivant, comme un polynôme, ou au logarithme multiplié par 1. La nouvelle intégrale doit être plus simple que la première.

Pourquoi changer les bornes lors d'un changement de variable ?

Les bornes désignent des valeurs de la variable d'intégration. Quand on remplace x par une nouvelle variable, il faut traduire aussi les deux extrémités pour calculer la même intégrale.

Comment calculer l'aire entre deux courbes ?

Étudier le signe de $f-g$ sur $[a,b]$, découper aux points d'intersection, puis intégrer à chaque fois la courbe supérieure moins la courbe inférieure. Le résultat s'exprime en unités d'aire.

Comment reconnaître une somme de Riemann ?

Repérer un facteur $\dfrac{b-a}{n}$ qui représente la largeur des rectangles et des termes de la forme $f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$. Identifier ensuite la fonction et le segment, et vérifier la continuité.

Comment calculer le volume d'un solide de révolution ?

Pour une rotation autour de l'axe des abscisses, appliquer $V = \pi\displaystyle\int_a^b f(x)^2\, dx$: chaque section perpendiculaire à l'axe est un disque de rayon $|f(x)|$.

MATHFJIB - Mathématiques 2 Bac SM A
Suivez les consignes et la progression de votre professeur.
Retrouver le cours, ses illustrations et les exercices corrigés en ligne.